Углублённый уровень

Геометрия

9

А. Г. Мерзляк

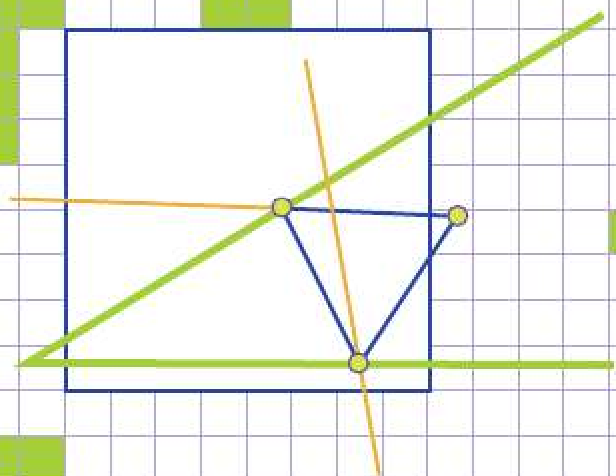
В. М. Поляков

вентана граф

А. Г. Мерзляк
В. М. Поляков

ГЕОМЕТРИЯ

9 класс



Углублённый уровень

Учебник

Под редакцией В. Е. Подольского

Рекомендовано
Министерством просвещения
Российской Федерации

Москва
Издательский центр
«Вентана-Граф»
2019

От авторов

Дорогие девятиклассники!

Мы надеемся, что вы не разочаровались, выбрав нелёгкий путь обучения в математическом классе. В этом учебном году вы продолжите изучать геометрию по углублённой программе. Надеемся, что этому будет способствовать учебник, который вы держите в руках.

Ознакомьтесь, пожалуйста, с его структурой.

Учебник разделён на шесть глав, каждая из которых состоит из параграфов. В параграфах изложен теоретический материал. Особое внимание обращайте на текст, напечатанный **жирным шрифтом**, ***жирным курсивом*** и *курсивом*; так в книге выделены определения, правила и важнейшие математические утверждения.

Как правило, изложение теоретического материала завершается примерами решения задач. Эти записи можно рассматривать как один из возможных образцов оформления решения.

К каждому параграфу подобраны задачи для самостоятельного решения, к которым мы советуем приступать только после усвоения теоретического материала. Среди заданий есть как простые и средние по сложности упражнения, так и сложные задачи.

Если после выполнения домашних заданий остаётся свободное время и вы хотите знать больше, то рекомендуем обратиться к рубрике «Когда сделаны уроки». Материал, изложенный там, непрост. Но тем интереснее испытать свои силы!

Дерзайте! Желаем успеха!

Условные обозначения

Простые задачи

Задачи среднего уровня сложности

Сложные задачи

Задачи высокой сложности

Ключевые задачи, результат которых можно использовать при решении других задач

Окончание доказательства теоремы

Окончание доказательства следствия

Окончание доказательства леммы

Окончание решения задачи

3.6 Задания, рекомендуемые для домашней работы

9.1 Задания, рекомендуемые для устной работы

глава

1 Решение треугольников

- В этой главе вы узнаете, что называют синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом угла α, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.
- Вы научитесь по двум сторонам треугольника и углу между ними находить третью сторону, а также по стороне и двум прилежащим к ней углам находить две другие стороны треугольника.
- В 8 классе вы научились решать прямоугольные треугольники. Изучив материал этой главы, вы сможете решать треугольники любого вида.
- Вы узнаете новые формулы, с помощью которых можно находить площадь треугольника.

§ 1 Синус, косинус, тангенс и котангенс угла от 0° до 180°

Понятия «синус», «косинус», «тангенс» и «котангенс» острого угла вам знакомы из курса геометрии 8 класса. Расширим эти понятия для произвольного угла α, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

В верхней полуплоскости координатной плоскости рассмотрим полуокружность с центром в начале координат, радиус которой равен 1 (рис. 1.1). Такую полуокружность называют **единичной**.

Будем говорить, что **углу** α **(**$0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$**) соответствует точка** M единичной полуокружности, если $\angle MOA = \alpha$, где точки O и A имеют соответственно координаты (0; 0) и (1; 0) (см. рис. 1.1). Например, на рисунке 1.1 углу, равному 90°, соответствует точка C; углу, равному 180°, — точка B; углу, равному 0°, — точка A.

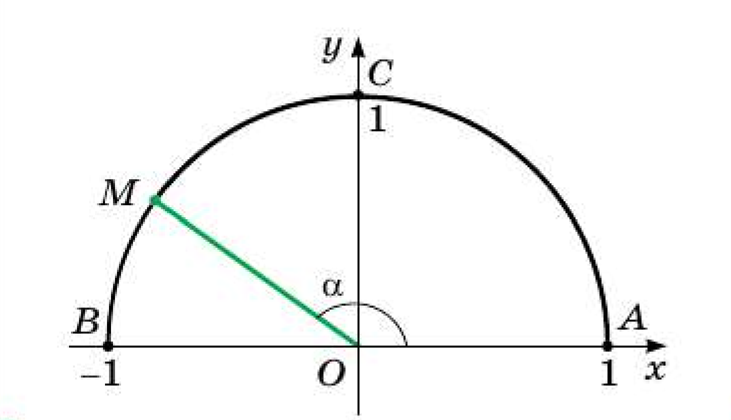


Рис. 1.1

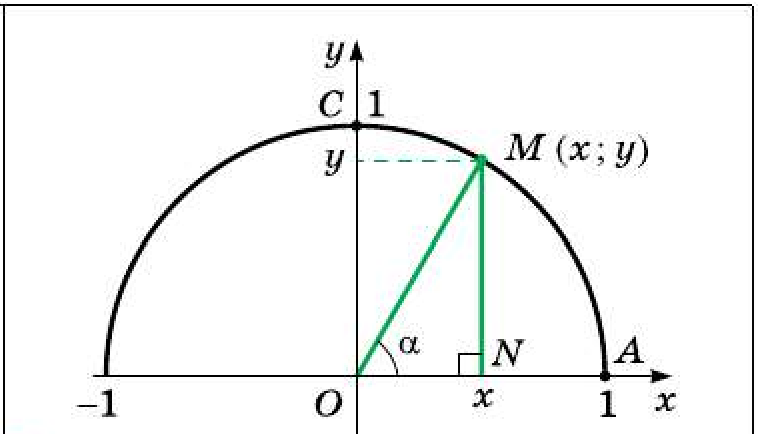


Рис. 1.2

Пусть α — острый угол. Ему соответствует некоторая точка $M\ (x;\ y)$ дуги AC (рис. 1.2). Из прямоугольного треугольника OMN получаем:

$$\cos\alpha = \frac{ON}{OM}, \quad \sin\alpha = \frac{MN}{OM}.$$

Поскольку $OM = 1$, $ON = x$, $MN = y$, то

$$x = \cos\alpha,\ y = \sin\alpha.$$

Итак, косинус и синус острого угла α — это соответственно абсцисса и ордината точки M единичной полуокружности, соответствующей углу α.

Полученный результат подсказывает, как определить синус и косинус произвольного угла α, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

Определение

Косинусом и синусом угла α ($0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$) называют соответственно абсциссу x и ординату y точки M единичной полуокружности, соответствующей углу α (рис. 1.3)**.**

Пользуясь таким определением, можно, например, установить, что: $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$, $\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$, $\sin 180° = 0$, $\cos 180° = -1$.

Если $M\ (x;\ y)$ — произвольная точка единичной полуокружности, то $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и $0 \leqslant y \leqslant 1$. Следовательно, для любого угла α, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$, имеем:

$$0 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1,$$
$$-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1.$$

Если α — тупой угол, то абсцисса точки, соответствующей этому углу, отрицательна. Следовательно, косинус тупого угла является от-

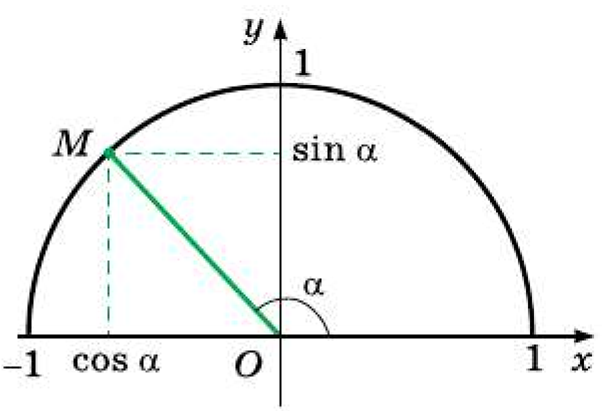


Рис. 1.3

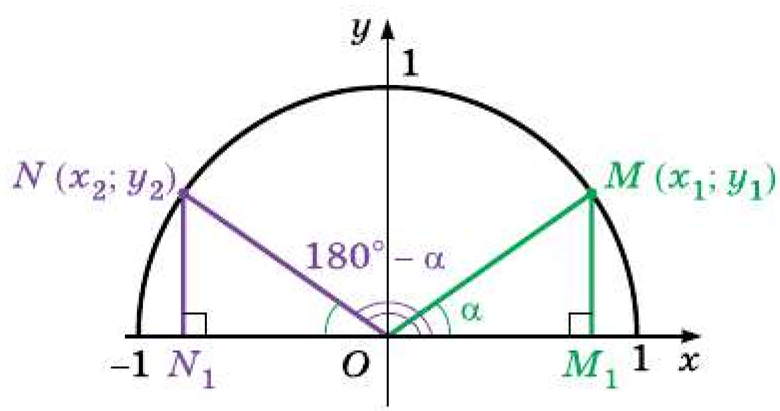


Рис. 1.4

рицательным числом. Справедливо и такое утверждение: если $\cos\alpha < 0$, то α — тупой или развёрнутый угол.

Из курса геометрии 8 класса вы знаете, что для любого острого угла α выполняются равенства

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha,$$
$$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$$

Эти формулы остаются справедливыми и для $\alpha = 0°$, и для $\alpha = 90°$ (убедитесь в этом самостоятельно).

Пусть углам α и $180° - \alpha$, где $\alpha \neq 0°$, $\alpha \neq 90°$ и $\alpha \neq 180°$, соответствуют точки M $(x_1; y_1)$ и N $(x_2; y_2)$ единичной полуокружности (рис. 1.4).

Прямоугольные треугольники OMM_1 и ONN_1 равны по гипотенузе и острому углу ($ON = OM = 1$, $\angle MOM_1 = \angle NON_1 = \alpha$). Отсюда $y_2 = y_1$ и $x_2 = -x_1$. Следовательно,

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha,$$
$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

Убедитесь самостоятельно, что эти равенства остаются верными для $\alpha = 0°$, $\alpha = 90°$, $\alpha = 180°$.

Если α — острый угол, то, как вы знаете из курса геометрии 8 класса, справедливо тождество, которое называют **основным тригонометрическим тождеством**.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Это равенство остаётся верным для $\alpha = 0°$, $\alpha = 90°$, $\alpha = 180°$ (убедитесь в этом самостоятельно).

Пусть α — тупой угол. Тогда угол $180° - \alpha$ является острым. Имеем:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = (\sin(180° - \alpha))^2 + (-\cos(180° - \alpha))^2 =$$
$$= \sin^2(180° - \alpha) + \cos^2(180° - \alpha) = 1.$$

Следовательно, равенство $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ выполняется для всех $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

Для того чтобы сравнивать значения $\sin\alpha$ и $\sin\beta$, а также $\cos\alpha$ и $\cos\beta$, воспользуемся следующими наглядно понятными соображениями:

если $0° \leqslant \alpha < \beta \leqslant 90°$, то $\sin\alpha < \sin\beta$ (рис. 1.5);

если $90° \leqslant \alpha < \beta \leqslant 180°$, то $\sin\alpha > \sin\beta$ (рис. 1.6);

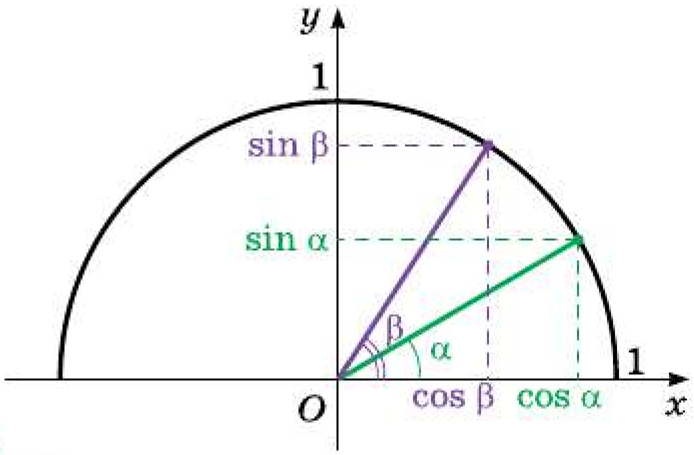


Рис. **1.5**

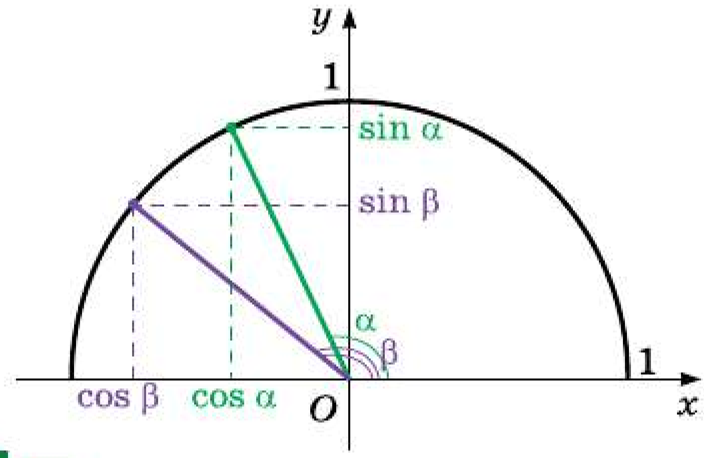


Рис. **1.6**

если $0° \leqslant \alpha < \beta \leqslant 180°$, то $\cos\alpha > \cos\beta$ (рис. 1.5, 1.6).

Определение

Тангенсом угла α, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ и $\alpha \neq 90°$, называют отношение $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, т. е.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Поскольку $\cos 90° = 0$, то $\operatorname{tg}\alpha$ не определён для $\alpha = 90°$.

Определение

Котангенсом угла α, где $0° < \alpha < 180°$, называют отношение $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, т. е.

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Поскольку $\sin 0° = \sin 180° = 0$, то $\operatorname{ctg}\alpha$ не определён для $\alpha = 0°$ и $\alpha = 180°$.

Очевидно, что каждому углу α ($0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$) соответствует *единственная* точка единичной полуокружности. Значит, каждому углу α соответствует единственное число, которое является значением синуса (косинуса, тангенса для $\alpha \neq 90°$, котангенса для $\alpha \neq 0°$ и $\alpha \neq 180°$). Поэтому зависимость значения синуса (косинуса, тангенса, котангенса) от величины угла является функциональной.

Функции $f(\alpha) = \sin\alpha$, $g(\alpha) = \cos\alpha$, $h(\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$, $p(\alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$, соответствующие этим функциональным зависимостям, называют **тригонометрическими функциями** угла α.

Задача 1. Докажите, что $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}(180° - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$.

Решение. $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = \dfrac{\sin(180° - \alpha)}{\cos(180° - \alpha)} = \dfrac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha$;

$\operatorname{ctg}(180° - \alpha) = \dfrac{\cos(180° - \alpha)}{\sin(180° - \alpha)} = \dfrac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha$. ■

Задача 2. Найдите $\sin 120°$, $\cos 120°$, $\operatorname{tg} 120°$, $\operatorname{ctg} 120°$.

Решение. Имеем: $\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

$\cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60° = -\dfrac{1}{2}$;

$\operatorname{tg} 120° = \operatorname{tg}(180° - 60°) = -\operatorname{tg} 60° = -\sqrt{3}$;

$\operatorname{ctg} 120° = \operatorname{ctg}(180° - 60°) = -\operatorname{ctg} 60° = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ■

1. Какую полуокружность называют единичной?
2. Что называют синусом угла α, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$?
3. Что называют косинусом угла α, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$?
4. В каких пределах находятся значения $\sin\alpha$, если $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$?
5. В каких пределах находятся значения $\cos\alpha$, если $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$?
6. Чему равен $\sin(180° - \alpha)$? $\cos(180° - \alpha)$?
7. Как связаны между собой синус и косинус одного и того же угла?
8. Что называют тангенсом угла α, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ и $\alpha \neq 90°$?
9. Что называют котангенсом угла α, где $0° < \alpha < 180°$?

Упражнения

1.1. Чему равен:

1) $\sin(180° - \alpha)$, если $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$;
2) $\cos(180° - \alpha)$, если $\cos\alpha = 0{,}7$;
3) $\operatorname{tg}(180° - \alpha)$, если $\operatorname{tg}\alpha = -5$;
4) $\operatorname{ctg}(180° - \alpha)$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -\dfrac{1}{3}$?

1.2. Углы α и β смежные, $\cos\alpha = -\dfrac{1}{6}$.

1) Найдите $\cos\beta$.
2) Какой из углов α и β является острым, а какой — тупым?

1.3. Найдите значение выражения:

1) $2\sin 90° + 3\cos 0° + \operatorname{ctg} 90°$;
2) $3\sin 0° - 5\cos 180° + \operatorname{tg} 180°$;
3) $\operatorname{tg} 23° \operatorname{tg} 0° \operatorname{tg} 106°$;

4) $6\ \mathrm{tg}\,180^\circ + 5\sin 180^\circ + \cos 180^\circ$;

5) $\cos^2 165^\circ + \sin^2 165^\circ$;

6) $\dfrac{\sin 0^\circ + \sin 90^\circ}{\cos 0^\circ - \cos 90^\circ}$.

1.4. Вычислите:

1) $4\cos 90^\circ + 2\cos 180^\circ - \mathrm{ctg}\,90^\circ$;

2) $\cos 0^\circ - \cos 180^\circ + \sin 90^\circ + \mathrm{tg}\,180^\circ$.

1.5. Чему равен синус угла, если его косинус равен: 1) 1; 2) 0?

1.6. Чему равен косинус угла, если его синус равен: 1) 1; 2) 0?

1.7. Чему равен тангенс угла, если его котангенс равен: 1) 1; 2) $-\dfrac{1}{3}$?

1.8. Чему равен котангенс угла, если его тангенс равен: 1) –1; 2) 3?

1.9. Найдите $\sin 135^\circ$, $\cos 135^\circ$, $\mathrm{tg}\,135^\circ$, $\mathrm{ctg}\,135^\circ$.

1.10. Найдите $\sin 150^\circ$, $\cos 150^\circ$, $\mathrm{tg}\,150^\circ$, $\mathrm{ctg}\,150^\circ$.

1.11. Существует ли угол α, для которого:

1) $\sin\alpha = 0{,}3$;

2) $\cos\alpha = -0{,}99$;

3) $\cos\alpha = 1{,}001$;

4) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$?

1.12. Найдите:

1) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$ и $90^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$;

2) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$;

3) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -0{,}8$;

4) $\mathrm{tg}\,\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$ и $90^\circ < \alpha \leqslant 180^\circ$;

5) $\mathrm{ctg}\,\alpha$, если $\cos\alpha = \dfrac{12}{13}$ и $0^\circ < \alpha \leqslant 90^\circ$.

1.13. Найдите:

1) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$ и $90^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$;

2) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \dfrac{1}{6}$;

3) $\mathrm{tg}\,\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$ и $0^\circ \leqslant \alpha < 90^\circ$;

4) $\mathrm{ctg}\,\alpha$, если $\cos\alpha = -\dfrac{8}{17}$.

1.14. Верно ли утверждение (ответ обоснуйте):

1) косинус острого угла больше косинуса тупого угла;

2) существует тупой угол, синус и косинус которого равны;

3) существует угол, синус и косинус которого равны нулю;

4) косинус угла треугольника является неотрицательным числом;

5) синус угла треугольника может быть равным отрицательному числу;

6) косинус угла треугольника может быть равным нулю;

7) синус угла треугольника может быть равным нулю;

8) синусы смежных углов равны;

9) косинусы неравных смежных углов являются противоположными числами;

10) если косинусы двух углов равны, то равны и сами углы;

11) если синусы двух углов равны, то равны и сами углы;

12) тангенс острого угла больше тангенса тупого угла;

13) тангенс острого угла больше котангенса тупого угла?

1.15. Сравните с нулём значение выражения:

1) $\sin 110° \cos 140°$;
2) $\sin 80° \cos 100° \cos 148°$;
3) $\sin 128° \cos^2 130° \operatorname{tg} 92°$;
4) $\sin 70° \cos 90° \operatorname{tg} 104°$;
5) $\operatorname{ctg} 100° \sin 114° \cos 11°$;
6) $\cos 85° \sin 171° \operatorname{ctg} 87°$.

1.16. Найдите значение выражения:

1) $2 \sin 120° + 4 \cos 150° - 2 \operatorname{tg} 135°$;
2) $\cos 120° - 8 \sin^2 150° + 3 \cos 90° \cos 162°$;
3) $\cos 180° (\sin 135° \operatorname{tg} 60° - \cos 135°)^2$;
4) $2 \sin^2 30° + \cos^2 60° + \sin^2 45° + \operatorname{tg}^2 60° - \operatorname{ctg}^2 30°$.

1.17. Чему равно значение выражения:

1) $2 \sin 150° - 4 \cos 120° + 2 \operatorname{tg} 135°$;
2) $\operatorname{tg} 45° \sin 60° \operatorname{ctg} 30°$;
3) $\sin 90° (\operatorname{tg} 150° \cos 135° - \operatorname{tg} 120° \cos 135°)^2$?

1.18. Найдите значение выражения, не пользуясь калькулятором:

1) $\dfrac{\sin 18°}{\sin 162°}$;
2) $\dfrac{\cos 18°}{\cos 162°}$;
3) $\dfrac{\operatorname{tg} 18°}{\operatorname{tg} 162°}$;
4) $\dfrac{\operatorname{ctg} 18°}{\operatorname{ctg} 162°}$.

1.19. Найдите значение выражения, не пользуясь калькулятором:

1) $\dfrac{\cos 49°}{\cos 131°}$;
2) $\dfrac{\operatorname{tg} 12°}{\operatorname{tg} 168°}$;
3) $\dfrac{\sin 53°}{\sin 127°}$.

1.20. Найдите сумму квадратов синусов всех углов прямоугольного треугольника.

1.21. Найдите сумму квадратов косинусов всех углов прямоугольного треугольника.

1.22 Сравните:

1) $\sin 17°$ и $\sin 35°$;
2) $\cos 1°$ и $\cos 2°$;
3) $\cos 89°$ и $\cos 113°$;
4) $\sin 50°$ и $\sin 140°$;
5) $\dfrac{1}{2}$ и $\sin 40°$;
6) $-\dfrac{1}{2}$ и $\cos 130°$.

1.23. Сравните:

1) $\sin 118°$ и $\sin 91°$;
2) $\cos 179°$ и $\cos 160°$;
3) $\cos 75°$ и $\cos 175°$;
4) $\sin 70°$ и $\sin 105°$;
5) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\cos 20°$;
6) $\frac{1}{2}$ и $\sin 130°$.

1.24. В треугольнике ABC известно, что $\angle B = 60°$, точка O — центр вписанной окружности. Чему равен косинус угла AOC?

1.25. Точка O — центр вписанной окружности треугольника ABC. Известно, что $\cos\angle BOC = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Найдите угол A треугольника.

◆ ◆

1.26. В непрямоугольном треугольнике ABC известно, что $\angle B = 30°$, точка H — ортоцентр. Чему равен тангенс угла AHC?

1.27. Точка H — ортоцентр треугольника ABC. Известно, что $\cos\angle AHC = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Найдите угол B треугольника.

1.28. Точка O — центр вписанной окружности треугольника ABC. Известно, что $\sin\angle AOC = \frac{1}{2}$. Найдите угол B треугольника.

1.29. Точка H — ортоцентр треугольника ABC. Известно, что $\sin\angle AHC = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Найдите угол B треугольника.

1.30. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Известно, что $\sin\angle AOC = \frac{1}{2}$. Найдите угол B треугольника.

◆ ◆ ◆

1.31. Вычислите $\operatorname{ctg} 5° \operatorname{ctg} 15° \operatorname{ctg} 25° \cdot \ldots \cdot \operatorname{ctg} 75° \operatorname{ctg} 85°$.

1.32. Вычислите $\operatorname{tg} 10° \operatorname{tg} 20° \operatorname{tg} 30° \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 70° \operatorname{tg} 80°$.

§ 2 Теорема косинусов

Из первого признака равенства треугольников следует, что две стороны и угол между ними однозначно определяют треугольник. А значит, по указанным элементам можно найти третью сторону треугольника. Как это сделать, показывает следующая теорема.

Теорема 2.1

(теорема косинусов)

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон и косинуса угла между ними.

Доказательство

Рассмотрим треугольник ABC. Докажем, например, что

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A.$$

Возможны три случая.

Первый случай. Угол A острый.

Ясно, что хотя бы один из углов B или C является острым. Пусть, например, $\angle C < 90°$. Проведём высоту BD (рис. 2.1).

В прямоугольном треугольнике ABD получаем: $BD = AB \cdot \sin A$, $AD = AB \cdot \cos A$.

В прямоугольном треугольнике $\triangle BDC$ получаем:

$$\begin{aligned} BC^2 &= BD^2 + CD^2 = BD^2 + (AC - AD)^2 = \\ &= AB^2 \cdot \sin^2 A + (AC - AB \cdot \cos A)^2 = \\ &= AB^2 \cdot \sin^2 A + AC^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A + AB^2 \cdot \cos^2 A = \\ &= AB^2 \cdot (\sin^2 A + \cos^2 A) + AC^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A = \\ &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A. \end{aligned}$$

Если $\angle C \geqslant 90°$, то $\angle B < 90°$. Тогда надо провести высоту треугольника ABC из вершины C. Дальнейшее доказательство аналогично рассмотренному.

Второй случай. Угол A тупой.

Проведём высоту BD треугольника ABC (рис. 2.2).

В прямоугольном треугольнике ABD получаем:

$$BD = AB \cdot \sin \angle BAD = AB \cdot \sin(180° - \angle BAC) = AB \cdot \sin \angle BAC,$$

$$AD = AB \cdot \cos \angle BAD = AB \cdot \cos(180° - \angle BAC) = -AB \cdot \cos \angle BAC.$$

В прямоугольном треугольнике BDC получаем:

$$\begin{aligned} BC^2 &= BD^2 + CD^2 = BD^2 + (AC + AD)^2 = \\ &= AB^2 \cdot \sin^2 \angle BAC + (AC - AB \cdot \cos \angle BAC)^2 = \\ &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC. \end{aligned}$$

Третий случай. Угол A прямой (рис. 2.3). Тогда $\cos A = 0$. Доказываемое равенство принимает вид

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

и выражает теорему Пифагора для треугольника ABC ($\angle A = 90°$). ■

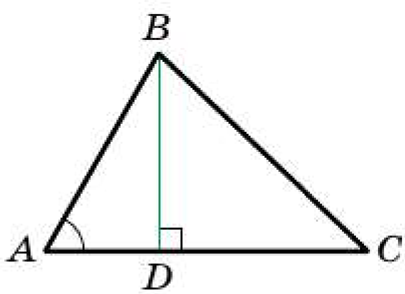


Рис. 2.1

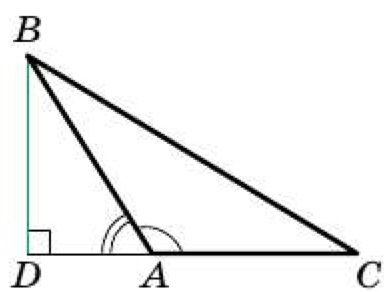


Рис. 2.2

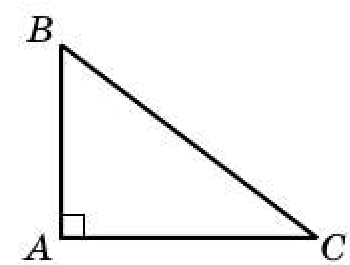


Рис. 2.3

Та часть доказательства, в которой рассмотрен случай, когда угол A прямой, показывает, что теорема Пифагора является частным случаем теоремы косинусов.

Если воспользоваться обозначениями для длин сторон и величин углов треугольника ABC (см. форзац), то, например, для стороны BC можно записать:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$$

С помощью теоремы косинусов, зная три стороны треугольника, можно определить, является ли он остроугольным, тупоугольным или прямоугольным.

Теорема 2.2

(следствие из теоремы косинусов)

Пусть a, b и c — длины сторон треугольника ABC, причём a — длина его наибольшей стороны. Если $a^2 < b^2 + c^2$, то треугольник остроугольный. Если $a^2 > b^2 + c^2$, то треугольник тупоугольный. Если $a^2 = b^2 + c^2$, то треугольник прямоугольный.

Доказательство

По теореме косинусов:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Отсюда $2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2$.

Пусть $a^2 < b^2 + c^2$. Тогда $b^2 + c^2 - a^2 > 0$. Следовательно, $2bc\cos\alpha > 0$, т. е. $\cos\alpha > 0$. Поэтому угол α — острый.

Поскольку a — длина наибольшей стороны треугольника, то против этой стороны лежит наибольший угол, который, как мы доказали, является острым. Следовательно, в этом случае треугольник является остроугольным.

Пусть $a^2 > b^2 + c^2$. Тогда $b^2 + c^2 - a^2 < 0$, а значит, $2bc\cos\alpha < 0$, т. е. $\cos\alpha < 0$. Следовательно, угол α — тупой.

Пусть $a^2 = b^2 + c^2$. Тогда $2bc\cos\alpha = 0$, т. е. $\cos\alpha = 0$. Отсюда $\alpha = 90°$. ■

Теорема 2.3

Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

Доказательство

На рисунке 2.4 изображён параллелограмм $ABCD$.

Пусть $AB = CD = a$, $BC = AD = b$, $\angle BAD = \alpha$, тогда $\angle ADC = 180° - \alpha$.

По теореме косинусов для треугольника ABD получаем:

$$BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha. \qquad (1)$$

По теореме косинусов для треугольника ACD получаем:

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180° - \alpha) \text{ или}$$

$$AC^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha. \qquad (2)$$

Сложив равенства (1) и (2), получим

$$BD^2 + AC^2 = 2a^2 + 2b^2. ■$$

Задача 1. Докажите, что в треугольнике ABC (см. обозначения на форзаце):

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4},$$

$$m_b^2 = \frac{2c^2 + 2a^2 - b^2}{4},$$

$$m_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}.$$

Решение. Пусть отрезок BM — медиана треугольника ABC. На луче BM отметим такую точку D, что $BM = MD$ (рис. 2.5). Тогда четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Используя теорему 2.3, получаем

$$BD^2 + AC^2 = 2AB^2 + 2BC^2 \text{ или}$$

$$4m_b^2 + b^2 = 2c^2 + 2a^2.$$

Отсюда $m_b^2 = \dfrac{2c^2 + 2a^2 - b^2}{4}$.

Аналогично можно доказать две остальные формулы. ■

Задача 2. На стороне AC треугольника ABC отметили точку D так, что $CD : AD = 1 : 2$. Найдите отрезок BD, если $AB = 14$ см, $BC = 13$ см, $AC = 15$ см.

Решение. По теореме косинусов из треугольника ABC (рис. 2.6) получаем:

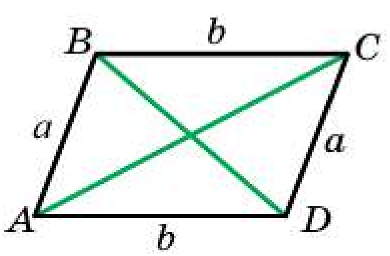


Рис. 2.4

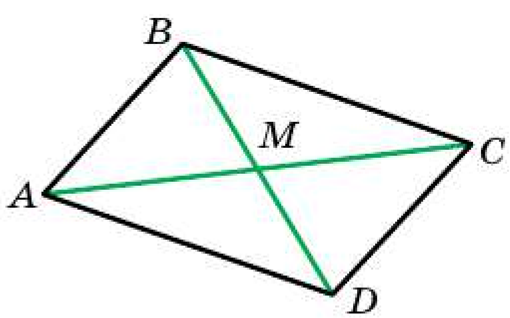


Рис. 2.5

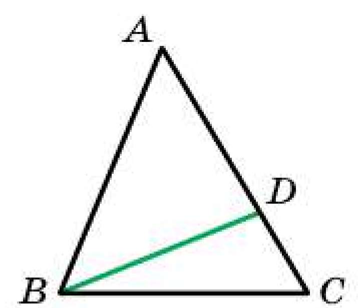


Рис. 2.6

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C$,

отсюда $\cos C = \dfrac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} =$

$= \dfrac{15^2 + 13^2 - 14^2}{2 \cdot 15 \cdot 13} = \dfrac{225 + 169 - 196}{2 \cdot 15 \cdot 13} = \dfrac{33}{65}$.

Поскольку $CD : AD = 1 : 2$, то $CD = \dfrac{1}{3}AC = 5$ см.

Тогда в треугольнике BCD получаем:

$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cdot \cos C = 13^2 + 5^2 - 2 \cdot 13 \cdot 5 \cdot \dfrac{33}{65} = 128$.

Следовательно, $BD = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$ (см).

Ответ: $8\sqrt{2}$ см. ■

Задача 3. На диаметре AB окружности с центром O выбрали точки M и N так, что $OM = ON$. На окружности отметили точку X. Докажите, что сумма $XM^2 + XN^2$ не зависит от выбора точки X.

Решение. Пусть X — точка окружности, отличная от точек A и B. Тогда радиус OX — медиана треугольника MXN (рис. 2.7). Воспользовавшись ключевой задачей 1, получим:

$$XO^2 = \frac{2XM^2 + 2XN^2 - MN^2}{4}. \text{ Отсюда } XM^2 + XN^2 = \frac{4XO^2 + MN^2}{2}.$$

Так как отрезок XO — радиус данной окружности, то значение правой части последнего равенства не зависит от выбора точки X.

Случай, когда точка X совпадает с точкой A или точкой B, рассмотрите самостоятельно. ■

Задача 4. Известно, что длина наибольшей стороны треугольника равна $\sqrt{3}$. Докажите, что три круга с центрами в вершинах треугольника и радиусами 1 полностью покрывают треугольник.

Решение. Очевидно, что эти круги покрывают стороны треугольника.

Пусть внутри треугольника ABC нашлась точка O, не покрытая ни одним из кругов. Очевидно, что один из углов AOB, BOC, COA не меньше $120°$.

Пусть, например, это угол AOC. Тогда $\cos \angle AOC \leqslant -\dfrac{1}{2}$. По теореме косинусов для треугольника AOC получаем: $AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2OA \cdot OC \cdot \cos \angle AOC$. С учётом неравенства $\cos \angle AOC \leqslant -\dfrac{1}{2}$ получаем: $AC^2 \geqslant OA^2 + OC^2 + OA \cdot OC$. Поскольку точка O не покрыта кругами с центрами A и C, то $OA > 1$ и $OC > 1$. Тогда $OA^2 + OC^2 + OA \cdot OC > 3$.

Отсюда $AC > \sqrt{3}$, что противоречит условию задачи. Следовательно, точек треугольника, не покрытых ни одним из указанных кругов, не существует. ■

Задача 5. Положительные числа a, b, c таковы, что $c^2 = a^2 + b^2 - ab$. Докажите, что $(a - c)(b - c) \leqslant 0$.

Решение. Построим угол MON, равный $60°$. На его сторонах OM и ON отметим соответственно точки A и B так, что $OA = a$, $OB = b$ (рис. 2.8). По теореме косинусов $AB^2 = a^2 + b^2 - ab$. Следовательно, $AB = c$.

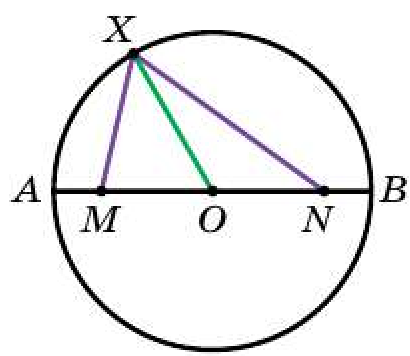


Рис. 2.7

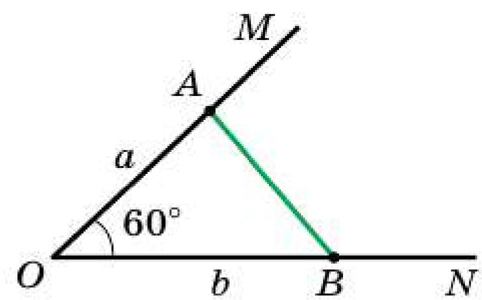


Рис. 2.8

В треугольнике OAB один из углов A или B не меньше $60°$, а другой не больше $60°$. Следовательно, в треугольнике OAB сторона c не меньше одной из двух остальных сторон и не больше другой. Отсюда $(a - c)(b - c) \leqslant 0$. ■

?

1. Сформулируйте теорему косинусов.

2. Как связаны между собой диагонали и стороны параллелограмма?

Упражнения

2.1. Найдите неизвестную сторону треугольника ABC, если:
1) $AB = 5$ см, $BC = 8$ см, $\angle B = 60°$;
2) $AB = 3$ см, $AC = 2\sqrt{2}$ см, $\angle A = 135°$.

2.2. Найдите неизвестную сторону треугольника DEF, если:
1) $DE = 4$ см, $DF = 2\sqrt{3}$ см, $\angle D = 30°$;
2) $DF = 3$ см, $EF = 5$ см, $\angle F = 120°$.

2.3. Стороны треугольника равны 12 см, 20 см и 28 см. Найдите наибольший угол треугольника.

2.4. Стороны треугольника равны $\sqrt{18}$ см, 5 см и 7 см. Найдите средний по величине угол треугольника.

2.5. Установите, остроугольным, прямоугольным или тупоугольным является треугольник, стороны которого равны:
1) 5 см, 7 см и 9 см;
2) 5 см, 12 см и 13 см;
3) 10 см, 15 см и 18 см.

2.6. Стороны треугольника равны 7 см, 8 см и 12 см. Является ли данный треугольник остроугольным?

2.7. Как с помощью одной рулетки проверить, имеет ли крышка парты форму прямоугольника?

2.8. Докажите, что треугольник со сторонами 8 см, 15 см и 17 см является прямоугольным.

2.9. Стороны параллелограмма равны $2\sqrt{2}$ см и 5 см, а один из углов равен 45°. Найдите диагонали параллелограмма.

2.10. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) $BC = 3$ см, $AD = 10$ см, $CD = 4$ см, $\angle D = 60°$. Найдите диагонали трапеции.

2.11. На стороне AB равностороннего треугольника ABC отметили точку D так, что $AD : DB = 2 : 1$. Найдите отрезок CD, если $AB = 6$ см.

2.12. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отметили точку M так, что $AM : BM = 1 : 3$. Найдите отрезок CM, если $AC = BC = 4$ см.

2.13. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $AC = 20$ см, $BC = 15$ см. На стороне AB отметили точку M так, что $BM = 4$ см. Найдите отрезок CM.

2.14. На продолжении гипотенузы AB прямоугольного равнобедренного треугольника ABC за точку B отметили точку D так, что $BD = BC$. Найдите отрезок CD, если катет треугольника ABC равен a.

2.15. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $AB = 13$ см, $AC = 12$ см. На продолжении гипотенузы AB за точку B отметили точку D так, что $BD = 26$ см. Найдите отрезок CD.

2.16. Центр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, находится на расстояниях a и b от концов гипотенузы. Найдите гипотенузу треугольника.

2.17. Точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, $BC = a$, $AC = b$, $\angle AOB = 120°$. Найдите сторону AB.

2.18. Две стороны треугольника, угол между которыми равен 60°, относятся как 5 : 8, а третья сторона равна 21 см. Найдите неизвестные стороны треугольника.

2.19. Две стороны треугольника относятся как $1 : 2\sqrt{3}$ и образуют угол, равный 30°. Третья сторона треугольника равна $2\sqrt{7}$ см. Найдите неизвестные стороны треугольника.

2.20. Сумма двух сторон треугольника, образующих угол 120°, равна 8 см, а длина третьей стороны составляет 7 см. Найдите неизвестные стороны треугольника.

2.21. Две стороны треугольника, угол между которыми равен $120°$, относятся как $5 : 3$. Найдите стороны треугольника, если его периметр равен 30 см.

2.22. Две стороны треугольника равны 16 см и 14 см, а угол, противолежащий меньшей из известных сторон, равен $60°$. Найдите неизвестную сторону треугольника.

2.23. Две стороны треугольника равны 15 см и 35 см, а угол, противолежащий большей из известных сторон, равен $120°$. Найдите периметр треугольника.

2.24. Одна из сторон треугольника в 2 раза больше другой, а угол между этими сторонами составляет $60°$. Докажите, что данный треугольник является прямоугольным.

2.25. Докажите, что если квадрат стороны треугольника равен неполному квадрату суммы двух других сторон, то противолежащий этой стороне угол равен $120°$.

2.26. Докажите, что если квадрат стороны треугольника равен неполному квадрату разности двух других сторон, то противолежащий этой стороне угол равен $60°$.

2.27. Две стороны параллелограмма равны 7 см и 11 см, а одна из диагоналей — 12 см. Найдите другую диагональ параллелограмма.

2.28. Диагонали параллелограмма равны 13 см и 11 см, а одна из сторон — 9 см. Найдите периметр параллелограмма.

2.29. Диагонали параллелограмма равны 8 см и 14 см, а одна из сторон на 2 см больше другой. Найдите стороны параллелограмма.

2.30. Стороны параллелограмма равны 11 см и 23 см, а его диагонали относятся как $2 : 3$. Найдите диагонали параллелограмма.

2.31. Стороны треугольника равны 16 см, 18 см и 26 см. Найдите медиану треугольника, проведённую к его большей стороне.

2.32. Две стороны треугольника равны 12 см и 14 см, а медиана, проведённая к третьей стороне, — 7 см. Найдите неизвестную сторону треугольника.

2.33. Две стороны треугольника равны 3 см и 4 см, а синус угла между ними равен $\dfrac{\sqrt{35}}{6}$. Найдите третью сторону треугольника.

2.34. На стороне BC треугольника ABC отметили точку D так, что $CD = 14$ см. Найдите отрезок AD, если $AB = 37$ см, $BC = 44$ см и $AC = 15$ см.

2.35. На стороне AB треугольника ABC отметили точку K, а на продолжении стороны BC за точку C — точку M. Найдите отрезок MK, если $AB = 15$ см, $BC = 7$ см, $AC = 13$ см, $AK = 8$ см, $MC = 3$ см.

2.36. В треугольнике ABC $AB = BC$, $\angle ABC = 120°$. На продолжении отрезка AB за точку B отметили точку D так, что $BD = 2AB$. Докажите, что треугольник ACD равнобедренный.

2.37. Найдите диагональ AC четырёхугольника $ABCD$, если около него можно описать окружность, $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, $CD = 5$ см, $AD = 6$ см.

2.38. Можно ли описать окружность около четырёхугольника $ABCD$, если $AB = 4$ см, $AD = 3$ см, $BD = 6$ см и $\angle C = 40°$?

2.39. Докажите, что против большего угла параллелограмма лежит бóльшая диагональ. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

2.40. Докажите, что треугольник со сторонами $2mn$, $m^2 - n^2$, $m^2 + n^2$, где m и n — натуральные числа, причём $m > n$, является прямоугольным[1].

2.41. Основание равнобедренного треугольника равно $4\sqrt{2}$ см, а медиана, проведённая к боковой стороне, — 5 см. Найдите боковую сторону треугольника.

2.42. Докажите, что в треугольнике ABC выполняется равенство $\dfrac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \dfrac{3}{4}$.

2.43. Докажите, что если в треугольнике ABC выполняется равенство $m_a^2 + m_b^2 = 5m_c^2$, то этот треугольник является прямоугольным.

2.44. Докажите, что если в треугольнике ABC выполняется равенство $a^2 + b^2 = 5c^2$, то медианы, проведённые из вершин A и B, перпендикулярны.

◆ ◆ ◆

2.45. Докажите, что сумма квадратов медиан треугольника не меньше квадрата его полупериметра.

2.46. Даны две окружности, имеющие общий центр (такие окружности называют концентрическими). Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки одной из окружностей до концов диаметра другой окружности не зависит ни от выбранной точки, ни от выбранного диаметра.

2.47. Докажите, что сумма квадратов диагоналей четырёхугольника в два раза больше суммы квадратов отрезков, соединяющих середины противолежащих сторон.

---

[1] Придавая числам m и n различные натуральные значения, можно получить бесконечно много троек натуральных чисел таких, что квадрат одного из них равен сумме квадратов двух других. Такие тройки чисел называют **пифагоровыми**.

2.48. В выпуклом четырёхугольнике отрезки, соединяющие середины противолежащих сторон, равны m и n, угол между ними равен $60°$. Найдите диагонали четырёхугольника.

2.49. Диагонали выпуклого четырёхугольника равны a и b, угол между ними равен $45°$. Найдите отрезки, соединяющие середины противолежащих сторон четырёхугольника.

2.50. Расстояние между серединами диагоналей трапеции равно 5 см, а её боковые стороны равны 6 см и 8 см. Найдите расстояние между серединами оснований.

2.51. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) $AB = 5$ см, $BC = 9$ см, $AD = 16$ см, $\cos A = \frac{1}{7}$. Найдите сторону CD трапеции.

2.52. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) $AB = \sqrt{15}$ см, $BC = 6$ см, $CD = 4$ см, $AD = 11$ см. Найдите косинус угла D трапеции.

2.53. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) $BC = 1$ см, $AD = 6$ см, $AC = 3$ см, $BD = 5$ см. Найдите угол AOD, где O — точка пересечения диагоналей трапеции.

2.54. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Известно, что $A_1C_1 : AC = \frac{1}{2}$, $AB = c$, $BC = a$. Найдите сторону AC.

2.55. Из вершины D ромба $ABCD$ на сторону BC опущена высота DE. Диагональ AC пересекает отрезок DE в точке F так, что $DF : FE = 5 : 1$. Найдите сторону ромба, если $AE = 35$ см.

2.56. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, причём $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. Докажите, что диагонали этого четырёхугольника перпендикулярны.

2.57. В параллелограмме $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Известно, что $AB = a$, $BC = b$ ($a \geqslant b$), $\angle BOC = \alpha$. Докажите, что $\cos\alpha \geqslant \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$.

2.58. На диаметре окружности радиуса R с центром O отметили точку M. Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки M до концов хорды, параллельной этому диаметру, не зависит от выбора хорды.

2.59. Длина каждой из сторон выпуклого четырёхугольника не более 7 см. Докажите, что для любой точки четырёхугольника найдётся вершина, расстояние от которой до этой точки меньше, чем 5 см.

2.60 (Теорема Стюарта). На стороне BC треугольника ABC отметили точку D. Докажите, что

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC = BC \cdot DC \cdot BD.$$

2.61. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{1+x^2-x}+\sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}}.$$

2.62. Докажите, что $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}} \geqslant \sqrt{3}$.

2.63. Докажите, что для положительных чисел a, b и c выполняется неравенство

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2} \geqslant \sqrt{a^2+ac+c^2}.$$

2.64. Существуют ли такие три точки A, B и C, что для любой точки X длина хотя бы одного из отрезков XA, XB, XC равна иррациональному числу?

§ 3 Теорема синусов

Из второго признака равенства треугольников следует, что сторона и два прилежащих к ней угла однозначно определяют треугольник. Следовательно, по указанным элементам можно найти две другие стороны треугольника. Как это сделать, подсказывает следующая теорема.

Теорема 3.1
(теорема синусов)
Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

Лемма
Хорда окружности равна произведению диаметра и синуса любого вписанного угла, опирающегося на эту хорду.

Доказательство

На рисунке 3.1 отрезок MN — хорда окружности с центром в точке O. Проведём диаметр MP. Тогда угол MNP равен $90°$ как вписанный угол, опирающийся на диаметр. Пусть величина вписанного угла MPN равна α. Тогда из прямоугольного треугольника MPN получаем:

$$MN = MP \sin\alpha.$$

Все вписанные углы, опирающиеся на хорду MN, равны α или $180° - \alpha$.

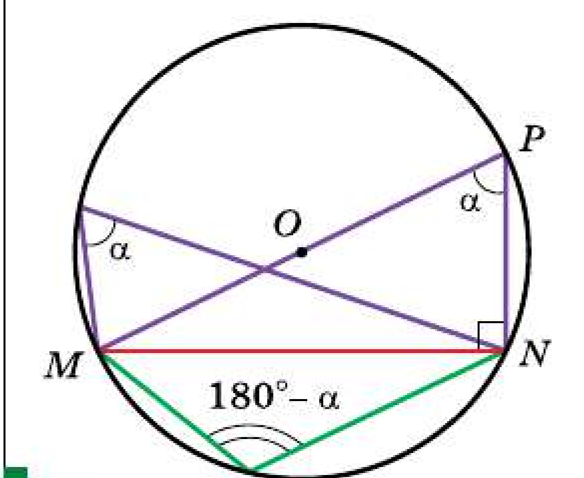


Рис. 3.1

Следовательно, их синусы равны. Поэтому полученное равенство справедливо для всех вписанных углов, опирающихся на хорду MN. ■

Теперь докажем теорему синусов.

Доказательство

Пусть в треугольнике ABC $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Докажем, что

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Пусть радиус описанной окружности треугольника ABC равен R. Тогда из доказанной леммы следует, что $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$. Отсюда

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R}$$ ■

Следствие

Радиус описанной окружности треугольника можно вычислить по формуле

$$\boxed{\boldsymbol{R = \frac{a}{2\sin\alpha}},}$$

где a — длина стороны треугольника, α — величина противолежащего этой стороне угла.

Задача 1. В треугольнике ABC $AC = \sqrt{2}$ см, $BC = 1$ см, $\angle A = 30°$. Найдите угол B.

Решение. По теореме косинусов: $\dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{AC}{\sin B}$, тогда

$$\sin B = \frac{AC \sin A}{BC}, \quad \sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Поскольку $BC < AC$, то $\angle A < \angle B$. Тогда угол B может быть как острым, так и тупым. Отсюда $\angle B = 45°$ или $\angle B = 180° - 45° = 135°$.

Ответ: $45°$ или $135°$. ■

Задача 2. Отрезок BD — биссектриса треугольника ABC, $\angle B = 30°$, $\angle C = 105°$ (рис. 3.2). Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если радиус окружности, описанной около треугольника BDC, равен $8\sqrt{6}$ см.

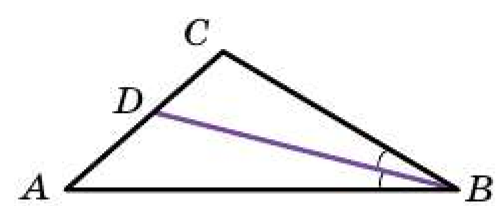


Рис. 3.2

Решение. Пусть R_1 — радиус окружности, описанной около треугольника BDC, $R_1 = 8\sqrt{6}$ см.

$\angle CBD = \frac{1}{2}\angle ABC = 15°$.

В треугольнике BDC:

$\angle BDC = 180° - (\angle CBD + \angle C)$, $\angle BDC = 180° - (15° + 105°) = 60°$.

Имеем: $\frac{BC}{\sin\angle BDC} = 2R_1$, отсюда $BC = 2R_1 \sin\angle BDC = 2 \cdot 8\sqrt{6}\sin 60° = 24\sqrt{2}$ (см).

В треугольнике ABC:

$\angle A = 180° - (\angle ABC + \angle C)$, $\angle A = 180° - (30° + 105°) = 45°$.

Пусть R — искомый радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Тогда $\frac{BC}{\sin A} = 2R$, отсюда $R = \frac{BC}{2\sin A}$, $R = \frac{24\sqrt{2}}{2\sin 45°} = 24$ (см).

Ответ: 24 см. ■

Задача 3. В равнобокой трапеции основания равны 21 см и 9 см, а высота — 8 см. Найдите радиус окружности, описанной около трапеции.

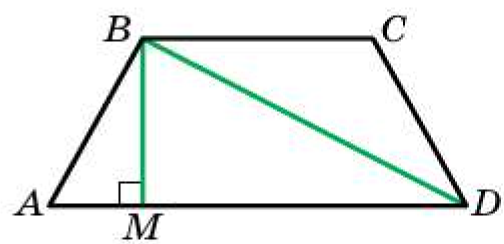


Рис. 3.3

Решение. Проведём высоту BM равнобокой трапеции $ABCD$ (рис. 3.3). Известно, что $AM = \frac{AD - BC}{2}$, $MD = \frac{BC + AD}{2}$. Имеем: $AM = 6$ см, $MD = 15$ см.

В треугольнике ABM получаем: $AB = \sqrt{AM^2 + BM^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ (см), $\sin A = \frac{BM}{AB}$, $\sin A = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$.

В треугольнике MBD получаем: $BD = \sqrt{BM^2 + MD^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$ (см).

Окружность, описанная около трапеции $ABCD$, является также описанной окружностью треугольника ABD. Отрезок BD — хорда этой окружности, $\angle A$ — вписанный угол, опирающийся на эту хорду. Обозначив искомый радиус R, можно записать: $BD = 2R \cdot \sin A$. Отсюда $R = \frac{BD}{2\sin A}$, $R = \frac{17}{2 \cdot \frac{4}{5}} = \frac{85}{8}$ (см).

Ответ: $\frac{85}{8}$ см. ■

Задача 4. На наибольшей стороне AC треугольника ABC отметили точку X, отличную от вершин A и C. Из точки X опущены перпендикуляры XM и XN на прямые AB и BC соответственно. Найдите такое положение точки X, при котором длина отрезка MN будет наименьшей.

Решение. На рисунке 3.4 показан случай, когда точки M и N лежат на сторонах треугольника, а на рисунке 3.5 — случай, когда только одна точка, например точка M, лежит на стороне треугольника.

Легко показать, что точки M, B, N, X лежат на одной окружности с диаметром BX. Отрезок MN — хорда этой окружности, на которую опирается угол B (рис. 3.4) или угол, смежный с углом B (рис. 3.5). Для каждого из этих случаев можно записать:

$$MN = BX \cdot \sin B.$$

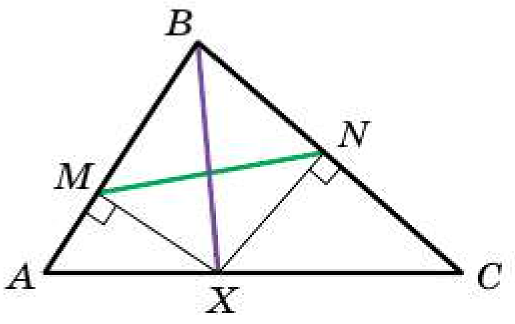


Рис. 3.4

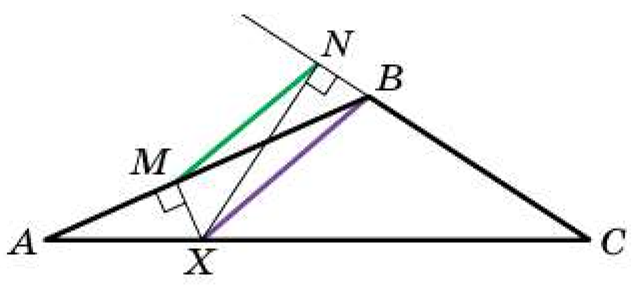


Рис. 3.5

Следовательно, длина отрезка MN принимает наименьшее значение, если принимает наименьшее значение длина отрезка BX.

А это условие достигается тогда, когда точка X является основанием высоты треугольника ABC, проведённой из вершины B. ■

?

1. Как найти хорду окружности, если известны диаметр окружности и вписанный угол, опирающийся на эту хорду?
2. Сформулируйте теорему синусов.
3. Как найти радиус окружности, описанной около треугольника со стороной a и противолежащим этой стороне углом α?

Упражнения

3.1. Найдите сторону BC треугольника ABC, изображённого на рисунке 3.6 (длины отрезков даны в сантиметрах).

3.2. Найдите угол A треугольника ABC, изображённого на рисунке 3.7 (длины отрезков даны в сантиметрах).

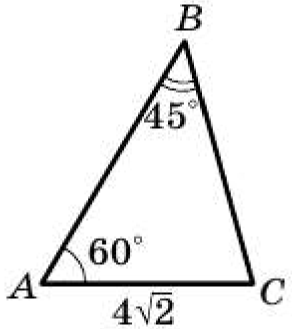


Рис. 3.6

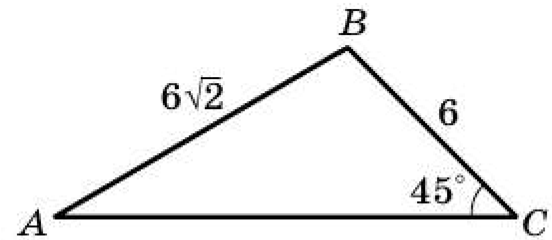


Рис. 3.7

3.3. Найдите сторону AB треугольника ABC, если $AC = \sqrt{6}$ см, $\angle B = 120°$, $\angle C = 45°$.

3.4. В треугольнике ABC $AB = 12$ см, $BC = 10$ см, $\sin A = 0{,}2$. Найдите синус угла C треугольника.

3.5. В треугольнике ABC $BC = a$, $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$. Найдите стороны AB и AC.

3.6. Диагональ параллелограмма равна d и образует с его сторонами углы α и β. Найдите стороны параллелограмма.

3.7. Найдите угол A треугольника ABC, если:

1) $AC = 2$ см, $BC = 1$ см, $\angle B = 135°$;

2) $AC = \sqrt{2}$ см, $BC = \sqrt{3}$ см, $\angle B = 45°$.

Сколько решений в каждом случае имеет задача? Ответ обоснуйте.

3.8. Существует ли треугольник ABC такой, что $\sin A = 0{,}4$, $AC = 18$ см, $BC = 6$ см? Ответ обоснуйте.

3.9. На продолжении стороны AB треугольника ABC за точку B отметили точку D. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ACD, если $\angle ABC = 60°$, $\angle ADC = 45°$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 4 см.

3.10. Радиус описанной окружности треугольника ABC равен 6 см. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника AOC, где O — точка пересечения биссектрис треугольника ABC, если $\angle ABC = 60°$.

3.11. Используя рисунок 3.8, найдите отрезок AD, если $CD = a$.

3.12. Используя рисунок 3.9, найдите отрезок AC, если $BD = m$.

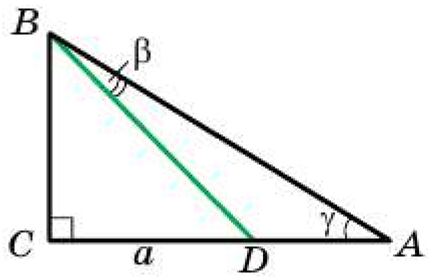


Рис. 3.8

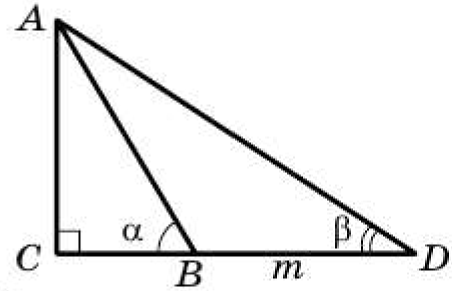


Рис. 3.9

3.13. На стороне AB треугольника ABC отметили точку M так, что $\angle AMC = \varphi$. Найдите отрезок CM, если $AB = c$, $\angle A = \alpha$, $\angle ACB = \gamma$.

3.14. В треугольнике ABC $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. На стороне BC отметили точку D так, что $\angle ADB = \varphi$, $AD = m$. Найдите сторону BC.

◆ ◆

3.15. Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$, где A, B и C — углы данного треугольника ABC.

3.16. Докажите, используя теорему синусов, что биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, длины которых пропорциональны прилежащим сторонам.

3.17. Докажите, что биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, длины которых обратно пропорциональны синусам прилежащих к этой стороне углов.

3.18. Для сторон и углов треугольника ABC выполняется равенство $\dfrac{BC}{\cos A} = \dfrac{AC}{\cos B}$. Докажите, что $AC = BC$.

3.19. Две стороны треугольника равны 6 см и 12 см, а высота, проведённая к третьей стороне, — 4 см. Найдите радиус окружности, описанной около данного треугольника.

3.20. Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника с основанием 16 см и боковой стороной 10 см.

3.21. Сторона треугольника равна 24 см, а радиус описанной окружности — $8\sqrt{3}$ см. Чему равен угол треугольника, противолежащий данной стороне?

3.22. В треугольнике ABC $AC = b$, $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$. Найдите биссектрису BD треугольника.

3.23. Основание равнобедренного треугольника равно a, противолежащий ему угол равен α. Найдите биссектрису треугольника, проведённую из вершины угла при основании.

3.24. Отрезок CD — биссектриса треугольника ABC, в котором $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Через точку D проведена прямая, которая параллельна стороне BC и пересекает сторону AC в точке E, причём $AE = a$. Найдите отрезок CE.

3.25. Медиана AM треугольника ABC равна m и образует со сторонами AB и AC углы α и β соответственно. Найдите стороны AB и AC.

3.26. Медиана CD треугольника ABC образует со сторонами AC и BC углы α и β соответственно, $BC = a$. Найдите медиану CD.

3.27. В прямоугольном треугольнике ABC через вершины A и C и середину M гипотенузы AB проведена окружность радиуса R. Найдите радиус описанной окружности треугольника CMB, если $\angle A = \alpha$.

3.28. Высоты непрямоугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Докажите, что радиусы окружностей, описанных около треугольников AHB, BHC, AHC и ABC, равны.

3.29. Центр вписанной окружности равнобедренного треугольника делит высоту, проведённую к основанию, на отрезки длиной 5 см и 3 см, считая от вершины. Найдите радиус описанной окружности.

◆ ◆ ◆

3.30. Диагонали описанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Радиусы описанных окружностей треугольников AOB, BOC, COD, DOA соответственно равны R_1, R_2, R_3, R_4. Докажите, что $R_1 + R_3 = R_2 + R_4$.

3.31. На стороне AB треугольника ABC отметили точки M и N. Известно, что радиусы описанных окружностей треугольников ANC и BMC равны. Кроме того, радиусы описанных окружностей треугольников AMC и BNC также равны. Докажите, что треугольник ABC является равнобедренным.

3.32. Из точки M окружности проведены три хорды $MN = 1$ см, $MP = 6$ см, $MQ = 2$ см. Известно, что $\angle NMP = \angle PMQ$. Найдите радиус окружности.

3.33. Из точки M, принадлежащей углу, на его стороны AB и AC опустили перпендикуляры, равные $\sqrt{7}$ см и $2\sqrt{7}$ см. Найдите отрезок MA, если $\angle A = 60°$.

3.34. Даны две пересекающиеся прямые, угол между которыми равен α. Найдите геометрическое место точек X таких, что расстояние между основаниями перпендикуляров, опущенных из точки X на данные прямые, равно данной величине a.

3.35. Из точки M окружности на её диаметры AB и CD опустили перпендикуляры. Докажите, что расстояние между основаниями перпендикуляров не зависит от выбора точки M.

3.36. Около треугольника ABC описана окружность. Из произвольной точки M окружности опущены перпендикуляры MN и MK на прямые AB и AC соответственно. Для какой точки M длина отрезка NK будет максимальной?

3.37. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке O. Прямая AO вторично пересекает описанную окружность треугольника BOC в точке M. Найдите отрезок OM, если $BC = 3$ см, $\angle BAC = 120°$.

3.38. Точка J — центр вписанной окружности треугольника ABC. Прямая AJ вторично пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке D. Найдите отрезок DJ, если $BC = 6$ см, а радиус описанной окружности равен $2\sqrt{3}$ см.

3.39. В треугольнике ABC на стороне AB существует такая точка D, что $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$. Докажите, что угол C тупой.

3.40. На диагонали BD квадрата $ABCD$ отметили точку E. Пусть точки O_1 и O_2 — центры описанных окружностей треугольников ABE и ADE соответственно. Докажите, что четырёхугольник AO_1EO_2 — квадрат.

3.41. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке K. Известно, что $AB = a$, $CD = b$, $\angle BKA = \alpha$. Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника.

3.42. В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$ (рис. 3.10). Прямые AB и CD пересекаются в точке M, а прямые BC и AD — в точке N. Известно, что $BM = DN$. Докажите, что $CM = CN$.

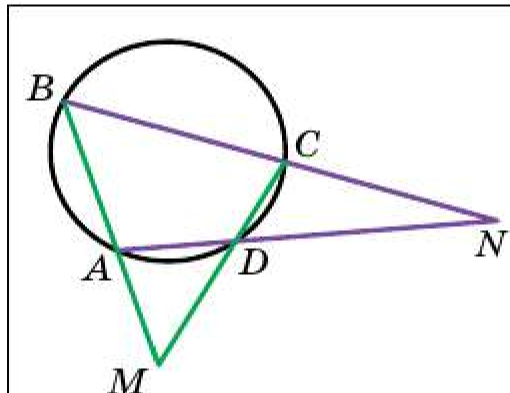


Рис. 3.10

КОГДА СДЕЛАНЫ УРОКИ

Тригонометрическая форма теоремы Чевы

В курсе геометрии 8 класса вы изучали теорему Чевы. Напомним её.

Теорема Чевы

Для того чтобы чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекались в одной точке (рис. 3.11), **необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство**

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1. \qquad (*)$$

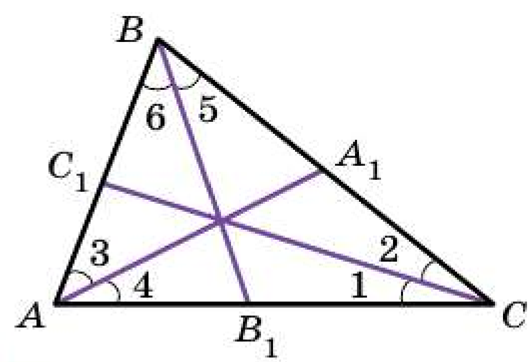


Рис. 3.11

Теорема синусов позволяет записать критерий конкурентности прямых AA_1, BB_1, CC_1 в другой форме.

Обозначим углы, образованные чевианами AA_1, BB_1 и CC_1 со сторонами треугольника ABC, так, как показано на рисунке 3.11.

В треугольнике AC_1C получаем: $\dfrac{AC_1}{CC_1} = \dfrac{\sin\angle 1}{\sin\angle C_1AC}$.

В треугольнике BC_1C получаем: $\dfrac{CC_1}{C_1B} = \dfrac{\sin\angle C_1BC}{\sin\angle 2}$.

Отсюда

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{\sin\angle 1}{\sin\angle C_1AC} \cdot \frac{\sin\angle C_1BC}{\sin\angle 2}. \qquad (1)$$

Аналогично можно показать, что

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{\sin\angle 3}{\sin\angle C_1BC} \cdot \frac{\sin\angle A_1CA}{\sin\angle 4}, \qquad (2)$$

$$\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{\sin\angle 5}{\sin\angle A_1CA} \cdot \frac{\sin\angle C_1AC}{\sin\angle 6}. \qquad (3)$$

Перемножив равенства (1), (2) и (3), получим:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{\sin\angle 1 \cdot \sin\angle 3 \cdot \sin\angle 5}{\sin\angle 2 \cdot \sin\angle 4 \cdot \sin\angle 6}.$$

Тогда необходимое и достаточное условие конкурентности чевиан AA_1, BB_1 и CC_1 можно выразить таким равенством:

$$\frac{\sin\angle 1 \cdot \sin\angle 3 \cdot \sin\angle 5}{\sin\angle 2 \cdot \sin\angle 4 \cdot \sin\angle 6} = 1.$$

Задача. Шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность. Докажите, что диагонали AD, BE и CF пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$.

Решение. Рассмотрим треугольник ACE. Введём обозначения углов так, как показано на рисунке 3.12. Пусть радиус окружности равен R. Тогда:

$AB = 2R\sin\angle 1;$

$BC = 2R\sin\angle 2;$

$CD = 2R\sin\angle 3;$

$DE = 2R\sin\angle 4;$

$EF = 2R\sin\angle 5;$

$FA = 2R\sin\angle 6.$

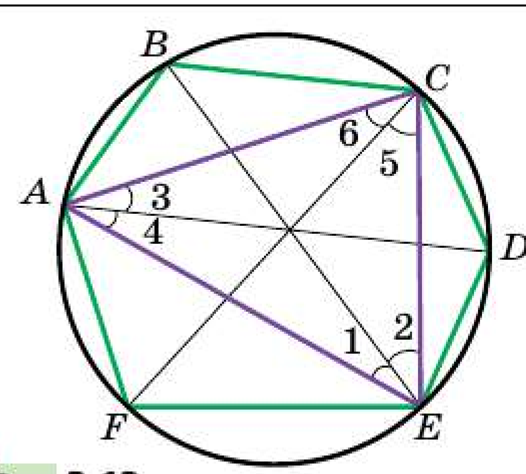


Рис. 3.12

Отсюда $\dfrac{\sin\angle 1\cdot\sin\angle 3\cdot\sin\angle 5}{\sin\angle 2\cdot\sin\angle 4\cdot\sin\angle 6}=\dfrac{AB\cdot CD\cdot EF}{BC\cdot DE\cdot FA}.$

Диагонали AD, BE и CF конкурентны тогда и только тогда, когда левая часть записанного равенства равна 1. Отсюда следует справедливость доказываемого утверждения. ■

Упражнения

1. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC отметили соответственно точки C_1, A_1 и B_1 так, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 конкурентны. Докажите, что прямые AA_2, BB_2 и CC_2, симметричные прямым AA_1, BB_1 и CC_1 относительно биссектрис углов A, B и C соответственно, также конкурентны.

2. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC отметили соответственно точки C_1, A_1 и B_1 так, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 конкурентны (рис. 3.13). На сторонах A_1B_1, B_1C_1 и C_1A_1 треугольника $A_1B_1C_1$ отметили соответственно точки C_2, A_2 и B_2 так, что прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 конкурентны. Докажите, что прямые AA_2, BB_2 и CC_2 также конкурентны.

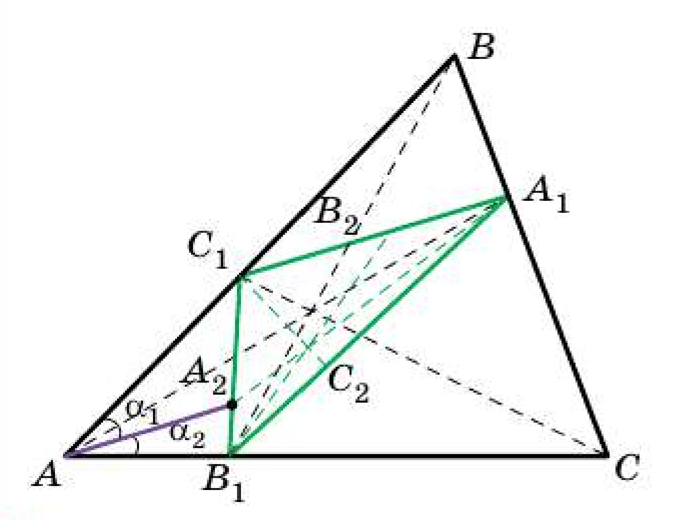


Рис. **3.13**

Указание. Докажите, что $\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\dfrac{AB_1\cdot C_1A_2}{A_2B_1\cdot AC_1}.$

Формула Эйлера для нахождения расстояния между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника

Теорема

Расстояние d между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{d=\sqrt{R^2-2Rr},}$$

где r и R — соответственно радиусы его вписанной и описанной окружностей.

Доказательство

Пусть точки O_1 и O — центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC соответственно (рис. 3.14). Биссектриса угла B пересекает описанную окружность в точке D. Согласно ключевой задаче 15.25 учебника «Геометрия, 8 класс»[1]:

$$BO_1 \cdot O_1D = R^2 - O_1O^2 = R^2 - d^2. \qquad (1)$$

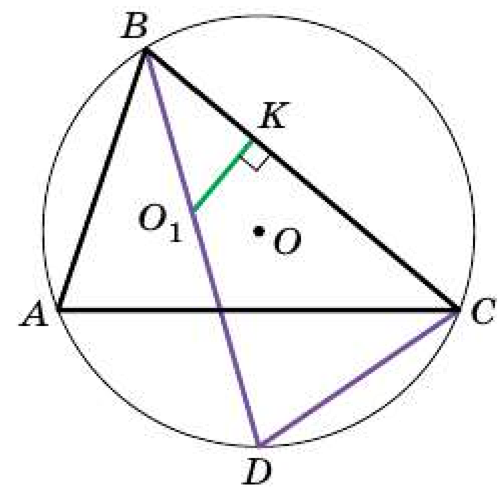


Рис. 3.14

Пусть вписанная окружность касается стороны BC в точке K. Тогда из треугольника O_1BK получаем: $BO_1 = \frac{O_1K}{\sin \angle DBC} = \frac{r}{\sin \angle DBC}$.

По лемме § 3 имеем: $DC = 2R \sin \angle DBC$. Согласно ключевой задаче 8.25 учебника «Геометрия, 8 класс» $O_1D = DC = 2R \sin \angle DBC$. Полученные результаты подставим в формулу (1):

$$\frac{r}{\sin \angle DBC} \cdot 2R \sin \angle DBC = R^2 - d^2.$$ Отсюда $d^2 = R^2 - 2Rr$. ■

Поскольку $d^2 = R^2 - 2Rr$, то $R^2 - 2Rr \geqslant 0$. Отсюда получаем, что для любого треугольника выполняется неравенство

$$R \geqslant 2r.$$

В этом неравенстве равенство достигается тогда и только тогда, когда центры вписанной и описанной окружностей треугольника совпадают. Этим свойством обладает только равносторонний треугольник.

§ 4 Решение треугольников

Решить треугольник — это значит найти неизвестные его стороны и углы по известным сторонам и углам.

В 8 классе вы научились решать прямоугольные треугольники. Теоремы косинусов и синусов позволяют решить любой треугольник.

Задача 1. Решите треугольник (рис. 4.1) по стороне $a = 12$ см и двум углам $\beta = 36°$, $\gamma = 119°$.

Используя теорему о сумме углов треугольника, получаем: $\alpha = 180° - (\beta + \gamma)$, $\alpha = 180° - 155° = 25°$.

[1] Здесь и далее ссылки идут на учебник: А. Г. Мерзляк, В. М. Поляков. Геометрия, 8 класс.

По теореме синусов $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$. Отсюда $b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$, $b = \frac{12\sin 36^\circ}{\sin 25^\circ} \approx$ $\approx \frac{12 \cdot 0{,}59}{0{,}42} \approx 16{,}9$ (см).

Вновь применяя теорему синусов, запишем: $\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha}$. Отсюда $c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$,

$c = \frac{12\sin 119^\circ}{\sin 25^\circ} = \frac{12\sin 61^\circ}{\sin 25^\circ} \approx \frac{12 \cdot 0{,}87}{0{,}42} \approx 24{,}9$ (см).

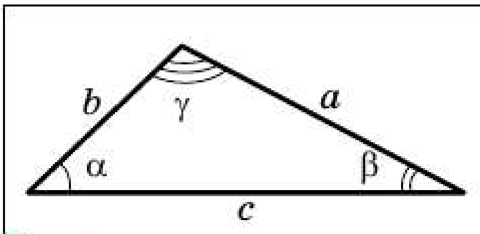


Рис. **4.1**

Ответ: $\alpha = 25^\circ$, $b \approx 16{,}9$ см, $c \approx 24{,}9$ см. ■

Заметим, что значения тригонометрических функций были найдены с помощью калькулятора.

Задача 2. Решите треугольник по двум сторонам $a = 14$ см, $b = 8$ см и углу $\gamma = 38^\circ$ между ними.

Решение. По теореме косинусов: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

Отсюда $c^2 = 196 + 64 - 2 \cdot 14 \cdot 8\cos 38^\circ \approx 260 - 224 \cdot 0{,}79 = 83{,}04$. Отсюда $c \approx 9{,}1$ см.

Далее имеем:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha;$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},\ \cos\alpha \approx -0{,}34.$$

Отсюда $\alpha \approx 110^\circ$.

Используя теорему о сумме углов треугольника, получаем: $\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma)$; $\beta \approx 180^\circ - 148^\circ = 32^\circ$.

Ответ: $c \approx 9{,}1$ см, $\alpha \approx 110^\circ$, $\beta \approx 32^\circ$. ■

Задача 3. Решите треугольник по трём сторонам $a = 7$ см, $b = 2$ см, $c = 8$ см.

Решение. Имеем: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, отсюда

$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{4 + 64 - 49}{2 \cdot 2 \cdot 8} \approx 0{,}59$. Получаем: $\alpha \approx 54^\circ$.

По теореме синусов $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$. Отсюда $\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}$,

$\sin\beta \approx \frac{2\sin 54^\circ}{7} \approx \frac{2 \cdot 0{,}81}{7} \approx 0{,}23$.

Так как b является наименьшей стороной данного треугольника, то угол β — острый. Тогда находим, что $\beta \approx 13^\circ$.

Имеем: $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$; $\gamma \approx 180^\circ - 67^\circ = 113^\circ$.

Ответ: $\alpha \approx 54^\circ$, $\beta \approx 13^\circ$, $\gamma \approx 113^\circ$. ■

Задача 4. Решите треугольник по двум сторонам и углу, противолежащему одной из сторон: 1) $a = 17$ см, $b = 6$ см, $\alpha = 156°$; 2) $b = 7$ см, $c = 8$ см, $\beta = 65°$; 3) $a = 6$ см, $b = 5$ см, $\beta = 50°$.

Решение. 1) По теореме синусов $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$. Отсюда

$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a},$$

$$\sin\beta = \frac{6\sin 156°}{17} = \frac{6\sin 24°}{17} \approx \frac{6 \cdot 0,41}{17} \approx 0,14.$$

Так как угол α данного треугольника тупой, то угол β — острый. Тогда находим, что $\beta \approx 8°$.

Используя теорему о сумме углов треугольника, получаем: $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$; $\gamma \approx 16°$.

Имеем: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$. Отсюда $c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$, $c \approx \frac{a\sin 16°}{\sin 156°} \approx \frac{17 \cdot 0,28}{0,41} \approx$ $\approx 11,6$ (см).

2) Имеем: $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$. Отсюда $\sin\gamma = \frac{c\sin\beta}{b}$, $\sin\gamma = \frac{8\sin 65°}{7} \approx$ $\approx \frac{8 \cdot 0,91}{7} \approx 1,04$, $1,04 > 1$, что невозможно.

3) Имеем: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$. Отсюда $\sin\alpha = \frac{a\sin\beta}{b}$, $\sin\alpha = \frac{6\sin 50°}{5} \approx$ $\approx \frac{6 \cdot 0,77}{5} \approx 0,92$.

Возможны два случая: $\alpha \approx 67°$ или $\alpha \approx 180° - 67° = 113°$.

Рассмотрим случай, когда $\alpha \approx 67°$.

Имеем: $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$, $\gamma \approx 180° - 117° = 63°$.

По теореме синусов $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$. Отсюда $c = \frac{b\sin\gamma}{\sin\beta}$, $c \approx \frac{5\sin 63°}{\sin 50°} \approx$ $\approx \frac{5 \cdot 0,89}{0,77} \approx 5,8$ (см).

Рассмотрим случай, когда $\alpha \approx 113°$.

Запишем: $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$, $\gamma \approx 180° - 163° = 17°$.

Рассуждая аналогично, получаем: $c \approx 1,9$ (см).

Ответ: 1) $\beta \approx 8°$, $\gamma \approx 16°$, $c \approx 11,6$ см; 2) задача не имеет решения; 3) $\alpha \approx 67°$, $\gamma \approx 63°$, $c \approx 5,8$ см или $\alpha \approx 113°$, $\gamma \approx 17°$, $c \approx 1,9$ см. ■

? Что означает решить треугольник?

Упражнения

4.1. Решите треугольник по стороне и двум углам[1]:
1) $a = 10$ см, $\beta = 20°$, $\gamma = 85°$;
2) $b = 16$ см, $\alpha = 40°$, $\beta = 110°$.

4.2. Решите треугольник по стороне и двум углам:
1) $b = 9$ см, $\alpha = 35°$, $\gamma = 70°$;
2) $c = 14$ см, $\beta = 132°$, $\gamma = 24°$.

4.3. Решите треугольник по двум сторонам и углу между ними:
1) $b = 18$ см, $c = 22$ см, $\alpha = 76°$;
2) $a = 20$ см, $b = 15$ см, $\gamma = 104°$.

4.4. Решите треугольник по двум сторонам и углу между ними:
1) $a = 8$ см, $c = 6$ см, $\beta = 15°$;
2) $b = 7$ см, $c = 5$ см, $\alpha = 145°$.

4.5. Решите треугольник по трём сторонам:
1) $a = 4$ см, $b = 5$ см, $c = 7$ см;
2) $a = 26$ см, $b = 19$ см, $c = 42$ см.

4.6. Решите треугольник по трём сторонам:
1) $a = 5$ см, $b = 6$ см, $c = 8$ см;
2) $a = 21$ см, $b = 17$ см, $c = 32$ см.

4.7. Решите треугольник, в котором:
1) $a = 10$ см, $b = 3$ см, $\beta = 10°$, угол α острый;
2) $a = 10$ см, $b = 3$ см, $\beta = 10°$, угол α тупой.

4.8. Решите треугольник по двум сторонам и углу, противолежащему одной из данных сторон:
1) $a = 7$ см, $b = 11$ см, $\beta = 46°$;
2) $b = 15$ см, $c = 17$ см, $\beta = 32°$;
3) $a = 7$ см, $c = 3$ см, $\gamma = 27°$.

4.9. Решите треугольник по двум сторонам и углу, противолежащему одной из данных сторон:
1) $a = 23$ см, $c = 30$ см, $\gamma = 102°$;
2) $a = 18$ см, $b = 25$ см, $\alpha = 36°$.

4.10. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC = 20$ см, $\angle A = 70°$. Найдите: 1) сторону AC; 2) медиану CM; 3) биссектрису AD; 4) радиус описанной окружности треугольника ABC.

---

[1] В задачах № 4.1 — 4.9 приняты обозначения: a, b и c — длины сторон треугольника, α, β и γ — величины углов, противолежащих соответственно сторонам с длинами a, b и c.

4.11. Диагональ AC равнобокой трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) равна 8 см, $\angle CAD = 38°$, $\angle BAD = 72°$. Найдите: 1) стороны трапеции; 2) радиус описанной окружности треугольника ABC.

4.12. Основания трапеции равны 12 см и 16 см, а боковые стороны — 7 см и 9 см. Найдите углы трапеции.

КОГДА СДЕЛАНЫ УРОКИ

Тригонометрия — наука об измерении треугольников

Вы знаете, что древние путешественники ориентировались по звёздам. Они могли достаточно точно определить положение корабля в океане или каравана в пустыне по расположению светил на небосклоне. При этом одним из ориентиров служила высота над горизонтом, на которую поднималось то или иное небесное светило в данной местности в данный момент времени[1].

Понятно, что непосредственно измерить эту высоту невозможно. Поэтому учёные стали разрабатывать методы косвенных измерений. Здесь существенную роль играло решение треугольника, две вершины которого лежали на поверхности Земли, а третья являлась звездой (рис. 4.2) — знакомая вам задача 3.12.

Для решения подобных задач древним астрономам необходимо было научиться находить взаимосвязи между элементами треугольника. Так возникла **тригонометрия** — наука, изучающая зависимость между сторонами и углами треугольника. Термин «тригонометрия» (от греческих слов «тригонон» — треугольник и «метрео» — измерять) означает «измерение треугольников».

На рисунке 4.3 изображён центральный угол AOB, равный 2α. Из прямоугольного треугольника OMB имеем: $MB = OB \sin \alpha$. Следова-

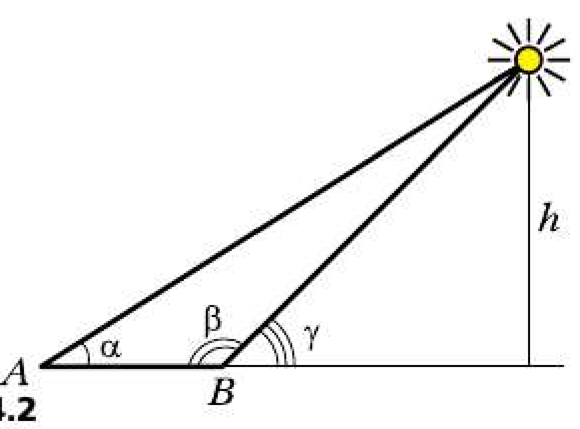


Рис. 4.2

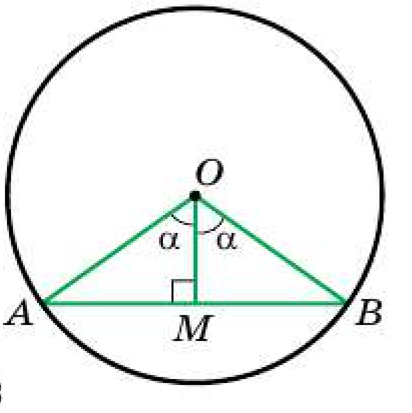


Рис. 4.3

[1] Если вы хотите узнать больше о том, как в Древнем мире с помощью геометрии проводили астрономические исследования, то рекомендуем принять участие в работе над проектом «Геометрия и астрономия».

тельно, если в единичной окружности измерить половины длин хорд, на которые опираются центральные углы с величинами 2°, 4°, 6°, ..., 180°, то тем самым мы вычислим значения синусов углов 1°, 2°, 3°, ..., 90° соответственно.

Рис. 4.4

Измеряя длины полухорд, древнегреческий астроном Гиппарх (II в. до н. э.) составил первые тригонометрические таблицы.

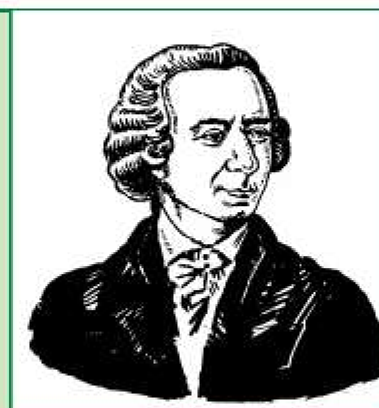
Понятия «синус» и «косинус» появляются в тригонометрических трактатах индийских учёных в IV—V вв. В X в. арабские учёные оперировали понятием «тангенс», которое возникло из потребностей гномоники — учения о солнечных часах (рис. 4.4).

В Европе первый трактат по тригонометрии «Пять книг о треугольниках всех видов», автором которого был немецкий учёный Региомонтан (1436—1476), был опубликован в 1533 г. Этот же учёный открыл и теорему тангенсов:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}},\qquad \frac{b-c}{b+c}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}},\qquad \frac{c-a}{c+a}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2}},$$

где a, b и c — длины сторон треугольника, α, β и γ — величины углов треугольника, противолежащих соответственно сторонам с длинами a, b и c. Современный вид тригонометрия приобрела в работах выдающегося математика Леонарда Эйлера.

Леонард Эйлер (1707—1783)



Математик, физик, механик и астроном, автор более 850 научных работ. Член Петербургской, Берлинской, Парижской академий наук, Лондонского королевского общества, многих других академий и научных обществ. Имя Эйлера встречается почти во всех областях математики и её приложений: теоремы Эйлера, тождества Эйлера, эйлеровы постоянные, углы, функции, интегралы, формулы, уравнения, подстановки и т. д. Родился в Швейцарии, с 1727 по 1741 г. и с 1766 г. до смерти работал в России. Оказал огромное влияние на развитие математического просвещения в России, возглавлял Петербургскую математическую школу, которая под руководством Эйлера создала обширную и замечательную для своего времени учебную литературу.

§ 5 Формулы для нахождения площади треугольника

Из курса геометрии 8 класса вы знаете, что площадь S треугольника можно вычислить по формулам

$$S = \frac{1}{2}ah, \quad S = pr \text{ и } S = R_a(p - a),$$

где a — длина стороны треугольника, h — длина высоты треугольника, проведённой к этой стороне, p — полупериметр треугольника, r — радиус вписанной окружности, R_a — радиус вневписанной окружности.

Теперь у нас появилась возможность получить ещё несколько формул для нахождения площади треугольника.

Теорема 5.1

Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон и синуса угла между ними.

Доказательство

Рассмотрим треугольник ABC, площадь которого равна S, такой, что $BC = a$, $AC = b$ и $\angle C = \gamma$. Докажем, что

$$\boxed{S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma}$$

Возможны три случая:

1) угол γ — острый (рис. 5.1);

2) угол γ — тупой (рис. 5.2);

3) угол γ — прямой.

На рисунках 5.1 и 5.2 проведём высоту BD треугольника ABC. Тогда $S = \frac{1}{2}BD \cdot AC = \frac{1}{2}BD \cdot b$.

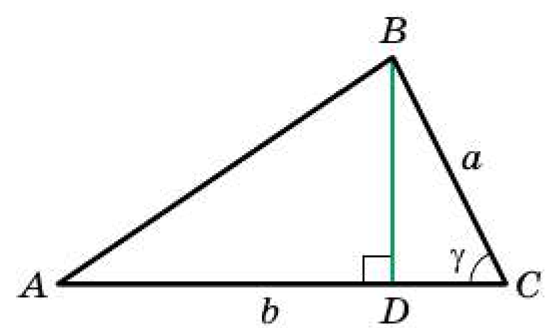


Рис. 5.1

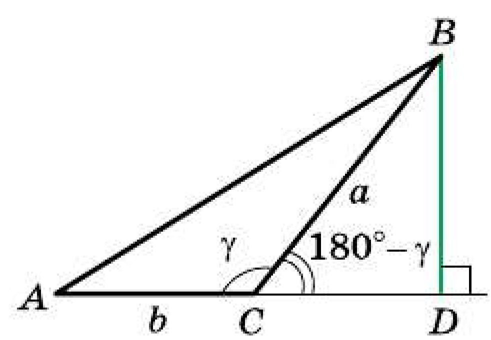


Рис. 5.2

Из $\triangle BDC$ в первом случае (см. рис. 5.1) $BD = a \sin\gamma$, а во втором (см. рис. 5.2) — $BD = a \sin(180° - \gamma) = a \sin\gamma$. Отсюда для двух первых случаев имеем $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

Если угол C прямой, то $\sin\gamma = 1$. Для прямоугольного треугольника ABC с катетами a и b имеем:

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ab\sin 90° = \frac{1}{2}ab\sin\gamma. \blacksquare$$

Теорема 5.2

(формула Герона[1])

Площадь S треугольника ABC можно вычислить по формуле

$$\boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},}$$

где a, b, c — длины сторон треугольника, p — его полупериметр.

Доказательство

Имеем: $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

Отсюда $S^2 = \frac{1}{4}a^2b^2\sin^2\gamma$.

По теореме косинусов $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

Отсюда $\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

Поскольку $\sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma = (1 - \cos\gamma)(1 + \cos\gamma)$, то:

$$S^2 = \frac{1}{4}a^2b^2(1 - \cos\gamma)(1 + \cos\gamma) =$$

$$= \frac{1}{4}a^2b^2 \cdot \left(1 - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)\left(1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}a^2b^2 \cdot \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2ab} \cdot \frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2ab} =$$

$$= \frac{1}{16}(c^2 - (a-b)^2)((a+b)^2 - c^2) =$$

$$= \frac{c - a + b}{2} \cdot \frac{c + a - b}{2} \cdot \frac{a + b - c}{2} \cdot \frac{a + b + c}{2} =$$

[1] Герон Александрийский — древнегреческий учёный, живший в I в. н. э.

$$= \frac{(a+b+c)-2a}{2} \cdot \frac{(a+b+c)-2b}{2} \cdot \frac{(a+b+c)-2c}{2} \cdot \frac{a+b+c}{2} =$$

$$= \frac{2p-2a}{2} \cdot \frac{2p-2b}{2} \cdot \frac{2p-2c}{2} \cdot \frac{2p}{2} = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

Отсюда $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. ■

Теорема 5.3

Площадь S треугольника ABC можно вычислить по формуле

$$\boxed{S = \frac{abc}{4R},}$$

где a, b, c — длины сторон треугольника, R — радиус описанной окружности треугольника ABC.

Доказательство

Имеем: $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$.

Из леммы § 3 следует, что $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$. Тогда $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}bc \cdot \frac{a}{2R} = \frac{abc}{4R}$. ■

Заметим, что доказанная теорема позволяет находить радиус описанной окружности треугольника по формуле

$$\boxed{R = \frac{abc}{4S}}$$

Теорема 5.4

Площадь S параллелограмма можно вычислить по формуле

$$S = ab\sin\alpha,$$

где a и b — длины соседних сторон параллелограмма, α — величина угла между ними.

Доказательство

Рассмотрим параллелограмм $ABCD$, в котором $AB = a$, $AD = b$, $\angle BAD = \alpha$ (рис. 5.3). Проведём диагональ BD. Поскольку $\triangle ABD = \triangle CBD$, то запишем:

$$S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2 \cdot \frac{1}{2}ab\sin\alpha = ab\sin\alpha.$$ ■

Теорема 5.5

Площадь выпуклого четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей и синуса угла между ними.

Доказательство

Через вершины A, B, C и D четырёхугольника $ABCD$ проведём прямые, параллельные его диагоналям AC и BD (рис. 5.4). Получим параллелограмм $MNPQ$, в котором $\angle M = \varphi$, $MN = AC$, $MQ = BD$. Площадь этого параллелограмма в два раза больше площади четырёхугольника $ABCD$ (докажите это самостоятельно). Отсюда

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}S_{MNPQ} = \frac{1}{2}MN \cdot MQ \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin\varphi. \blacksquare$$

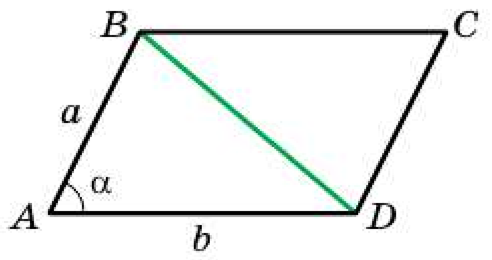


Рис. 5.3

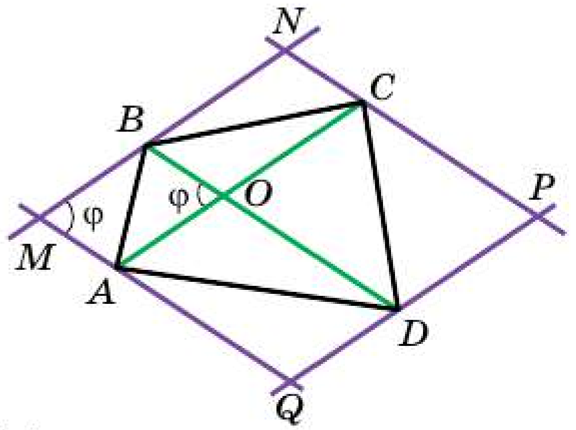


Рис. 5.4

Задача 1. Докажите, что площадь S треугольника ABC можно вычислить по формуле

$$\boxed{S = 2R^2\sin A\,\sin B\,\sin C,}$$

где R — радиус описанной окружности треугольника ABC.

Решение. Имеем: $S = \dfrac{abc}{4R}$ и $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$.

Отсюда $S = \dfrac{2R\sin A \cdot 2R\sin B \cdot 2R\sin C}{4R} =$

$= 2R^2\sin A\,\sin B\,\sin C.$ ■

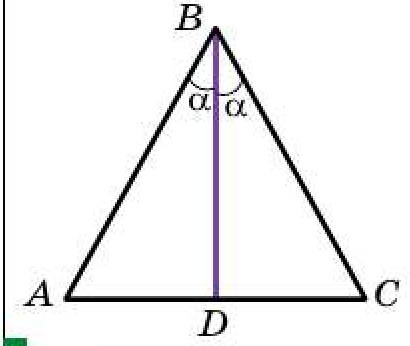


Рис. 5.5

Задача 2. Докажите, что $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

Решение. Рассмотрим равнобедренный треугольник с углом 2α при вершине и боковыми сторонами, равными 1 (рис. 5.5).

Имеем: $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$.

Также можно записать: $S_{ABC} = \frac{1}{2} BD \cdot AC = BD \cdot AD = \cos\alpha \sin\alpha$. Тогда $\frac{1}{2} \sin 2\alpha = \cos\alpha \sin\alpha$, т. е. $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$. ■

Задача 3. Стороны треугольника равны 17 см, 65 см и 80 см. Найдите наименьшую высоту треугольника, радиусы его вписанной и описанной окружностей.

Решение. Пусть $a = 17$ см, $b = 65$ см, $c = 80$ см.

Полупериметр треугольника $p = \frac{17 + 65 + 80}{2} = 81$ (см), его площадь $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{81(81-17)(81-65)(81-80)} = \sqrt{81 \cdot 64 \cdot 16} = 9 \cdot 8 \cdot 4 = 288$ (см^2).

Наименьшей высотой треугольника является высота h, проведённая к его наибольшей стороне c.

Так как $S = \frac{1}{2} ch$, то $h = \frac{2S}{c} = \frac{2 \cdot 288}{80} = 7{,}2$ (см).

Радиус вписанной окружности $r = \frac{S}{p} = \frac{288}{81} = \frac{32}{9}$ (см).

Радиус описанной окружности $R = \frac{abc}{4S} = \frac{17 \cdot 65 \cdot 80}{4 \cdot 288} = \frac{17 \cdot 65 \cdot 5}{4 \cdot 18} = \frac{5525}{72}$ (см).

Ответ: 7,2 см, $\frac{32}{9}$ см, $\frac{5525}{72}$ см. ■

Задача 4. Из точки M, принадлежащей углу AOB, опущены перпендикуляры MM_1 и MM_2 на стороны OA и OB соответственно (рис. 5.6). Докажите, что $S_{OM_1MM_2} \leqslant \frac{1}{2} OM^2 \cdot \sin \angle AOB$.

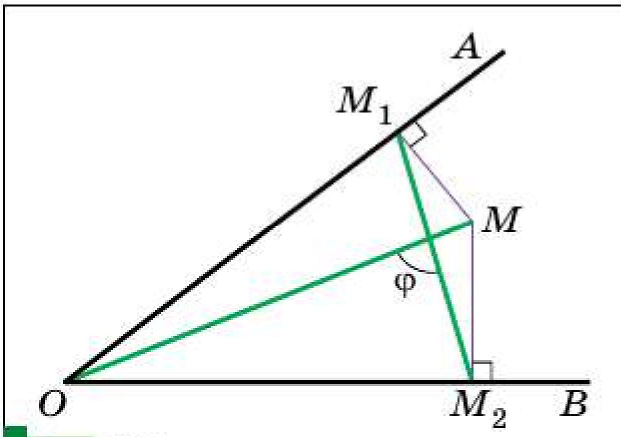


Рис. 5.6

Решение. Очевидно, что точки O, M_1, M, M_2 лежат на одной окружности с диаметром OM. Тогда $M_1M_2 = OM \cdot \sin \angle AOB$.

Имеем: $S_{OM_1MM_2} = \frac{1}{2} OM \cdot M_1M_2 \sin\varphi$, где φ — угол между диагоналями четырёхугольника OM_1MM_2.

Поскольку $0 < \sin\varphi \leqslant 1$, то

$$S_{OM_1MM_2} \leqslant \frac{1}{2} OM \cdot M_1M_2 = \frac{1}{2} OM^2 \cdot \sin \angle AOB.$$ ■

?

1. Как можно найти площадь треугольника, если известны две его стороны и угол между ними?
2. Запишите формулу Герона для вычисления площади треугольника.
3. Как можно найти площадь треугольника, если известны три его стороны и радиус описанной окружности?

Упражнения

5.1. Площадь треугольника MKN равна 75 см². Найдите сторону MK, если $KN = 15$ см, $\angle K = 30°$.

5.2. Найдите угол между данными сторонами треугольника ABC, если:
1) $AB = 12$ см, $BC = 10$ см, площадь треугольника равна $30\sqrt{3}$ см²;
2) $AB = 14$ см, $AC = 8$ см, площадь треугольника равна 56 см².

5.3. Площадь треугольника ABC равна 18 см². Известно, что $AC = 8$ см, $BC = 9$ см. Найдите угол C.

5.4. Найдите площадь равнобедренного треугольника с боковой стороной 16 см и углом 15° при основании.

5.5. Найдите боковую сторону равнобедренного треугольника, площадь которого равна 36 см², а угол при вершине — 30°.

5.6. Найдите наименьшую высоту треугольника со сторонами 13 см, 20 см и 21 см.

5.7. Найдите наибольшую высоту треугольника со сторонами 11 см, 25 см и 30 см.

5.8. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника со сторонами:
1) 5 см, 5 см и 6 см; 2) 25 см, 29 см и 36 см.

5.9. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника со сторонами 6 см, 25 см и 29 см.

5.10. Докажите, что $S \leqslant \frac{1}{2} ab$, где S — площадь треугольника, a и b — длины его соседних сторон.

5.11. Может ли площадь треугольника со сторонами 4 см и 6 см быть равной: 1) 6 см²; 2) 14 см²; 3) 12 см²?

5.12. Две соседние стороны параллелограмма соответственно равны двум соседним сторонам прямоугольника. Чему равен острый угол параллелограмма, если его площадь в два раза меньше площади прямоугольника?

5.13. Найдите отношение площадей S_1 и S_2 треугольников, изображённых на рисунке 5.7 (длины отрезков даны в сантиметрах).

Рис. 5.7

5.14. Найдите площадь треугольника, сторона которого равна a, а прилежащие к ней углы равны β и γ.

5.15. В треугольнике ABC известно, что $AC = b$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Найдите площадь треугольника.

5.16. В треугольнике ABC угол A равен α, а высоты BD и CE равны соответственно h_1 и h_2. Найдите площадь треугольника ABC.

5.17. Отрезок BM — высота треугольника ABC, $BM = h$, $\angle A = \alpha$, $\angle ABC = \beta$. Найдите площадь треугольника ABC.

5.18. В треугольник со сторонами 17 см, 25 см и 28 см вписана окружность, центр которой соединён с вершинами треугольника. Найдите площади образовавшихся при этом треугольников.

5.19. Отрезок AD — биссектриса треугольника ABC, $AB = 6$ см, $AC = 8$ см, $\angle BAC = 120°$. Найдите биссектрису AD.

5.20. Найдите площадь трапеции, основания которой равны 10 см и 50 см, а боковые стороны — 13 см и 37 см.

5.21. Основания трапеции равны 4 см и 5 см, а диагонали — 7 см и 8 см. Найдите площадь трапеции.

5.22. Стороны треугольника равны 39 см, 41 см и 50 см. Найдите радиус окружности, центр которой принадлежит большей стороне треугольника и которая касается двух других сторон.

5.23. Вершины треугольника соединены с центром вписанной в него окружности. Проведённые отрезки разбивают данный треугольник на треугольники, площади которых равны 26 см^2, 28 см^2 и 30 см^2. Найдите стороны данного треугольника.

5.24. Медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Найдите площадь треугольника ABC, если $AA_1 = 9$ см, $BB_1 = 12$ см, $\angle AMB = 150°$.

5.25. Радиус вписанной окружности треугольника равен 4 см. Точка касания делит одну из сторон треугольника на отрезки длиной 6 см и 8 см. Найдите две другие стороны треугольника.

5.26. Докажите, что площадь S треугольника можно вычислить по формуле[1]

$$S = \sqrt{rr_a r_b r_c}.$$

5.27. Докажите, что площадь S треугольника можно вычислить по формуле

$$S = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right)}}.$$

5.28. Докажите, что площадь S треугольника можно вычислить по формуле $S = \sqrt{\frac{Rh_a h_b h_c}{2}}$.

5.29. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса R. Угол между его диагоналями равен φ. Докажите, что площадь S четырёхугольника можно вычислить по формуле $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin \varphi$.

◆ ◆ ◆

5.30. Докажите, что длину биссектрисы треугольника ABC можно вычислить по формуле $l_a = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$.

5.31. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Известно, что $\frac{1}{AC} + \frac{1}{AB} = \frac{1}{AD}$. Найдите угол BAC.

5.32. В треугольнике ABC известно, что $\angle ABC = 60°$, $AB + BC = 3$ см. Отрезок BD — биссектриса треугольника, $BD = \frac{2}{3}AC$. Найдите стороны треугольника.

5.33. Найдите площадь треугольника, если известно, что две его стороны равны 35 см и 14 см, а биссектриса треугольника, проведённая из их общей вершины, равна 12 см.

5.34. Для треугольника ABC докажите неравенство $S \leqslant \frac{a^2+b^2}{4}$.

5.35. Для треугольника ABC докажите неравенство: 1) $S \leqslant \frac{a^2+ab+b^2}{6}$; 2) $S \leqslant \frac{a^2-ab+b^2}{2}$.

5.36. Докажите, что для прямоугольного треугольника выполняется неравенство $R + r \geqslant \sqrt{2S}$, где R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей соответственно.

---

[1] В задачах 5.26—5.30, 5.34—5.37 используются обозначения, приведённые на форзаце.

5.37. Длины сторон треугольника не превышают 1. Докажите, что его площадь не превышает $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

5.38. В четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Докажите, что $S \leqslant \frac{(a+c)(b+d)}{4}$, где S — площадь четырёхугольника.

5.39. Периметр четырёхугольника равен 4. Докажите, что его площадь не превышает 1.

5.40 (Формула Карно). Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Точки M_1, M_2, M_3 — середины сторон BC, AC и AB соответственно. Докажите, что $OM_1 + OM_2 + OM_3 = R + r$, где R и r — радиусы соответственно описанной и вписанной окружностей треугольника ABC.

5.41. Положительные числа x, y, z удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = 25, \\ \frac{y^2}{3} + z^2 = 16, \\ z^2 + zx + x^2 = 9. \end{cases}$$

Найдите значение выражения $xy + 2yz + 3xz$.

Синус, косинус, тангенс и котангенс угла от $0°$ до $180°$

- Косинусом и синусом угла α ($0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$) называют соответственно абсциссу x и ординату y точки M единичной полуокружности, соответствующей углу α.
- Тангенсом угла α, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ и $\alpha \neq 90°$, называют отношение $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.
- Котангенсом угла α, где $0° < \alpha < 180°$, называют отношение $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Теорема косинусов

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон и косинуса угла между ними.

Теорема синусов

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

Радиус описанной окружности треугольника

Радиус описанной окружности треугольника можно вычислить по формуле $R = \frac{a}{2\sin\alpha}$, где a — длина стороны треугольника, α — величина противолежащего ей угла.

Формулы для нахождения площади треугольника

- Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон и синуса угла между ними.
- Площадь S треугольника ABC можно вычислить по формулам:
- $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где a, b, c — длины сторон треугольника, p — его полупериметр (формула Герона);
- $S = \frac{abc}{4R}$, где a, b, c — длины сторон треугольника, R — радиус описанной окружности треугольника;
- $S = 2R^2\sin A\sin B\sin C$, где R — радиус описанной окружности треугольника ABC.

Формулы для нахождения площади четырёхугольника

- Площадь S параллелограмма можно вычислить по формуле $S = ab\sin\alpha$, где a и b — длины соседних сторон параллелограмма, α — величина угла между ними.
- Площадь выпуклого четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей и синуса угла между ними.

Глава 2
Правильные многоугольники

- В этой главе вы узнаете, какие многоугольники называют правильными. Изучите свойства правильных многоугольников. Узнаете, как с помощью циркуля и линейки строить некоторые из них.
- Научитесь находить радиусы вписанной и описанной окружностей правильного многоугольника, длину дуги окружности, площадь частей круга.

§ 6 Правильные многоугольники и их свойства

Определение

Многоугольник называют правильным, если у него все стороны равны и все углы равны.

С некоторыми правильными многоугольниками вы уже знакомы: равносторонний треугольник — это правильный треугольник, квадрат — это правильный четырёхугольник. На рисунке 6.1 изображены правильные пятиугольник и восьмиугольник.

Ознакомимся с некоторыми свойствами, которыми обладает любой правильный n-угольник.

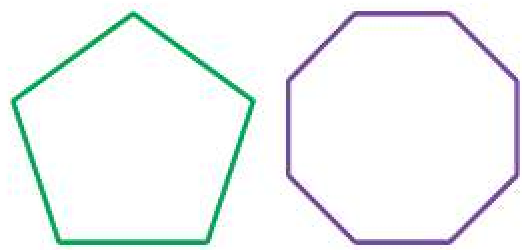


Рис. 6.1

Теорема 6.1

Правильный многоугольник является выпуклым многоугольником.

Доказательство

Достаточно показать, что в любом многоугольнике есть хотя бы один угол, меньший $180°$. Тогда из того, что в правильном n-угольнике все углы равны, будет следовать, что каждый из них меньше $180°$, т. е. многоугольник будет выпуклым.

Рассмотрим произвольный многоугольник и прямую a, не имеющую с ним общих точек (рис. 6.2). Из каждой вершины многоугольника опустим перпендикуляр на прямую a.

Сравнив длины этих перпендикуляров, мы можем выбрать вершину многоугольника, наименее удалённую от прямой a (если таких вершин несколько, то выберем любую из них). Пусть этим свойством обладает вершина A (рис. 6.2). Через точку A проведём прямую b, параллельную прямой a. Тогда угол A многоугольника лежит в одной полуплоскости относительно прямой b. Следовательно, $\angle A < 180°$. ■

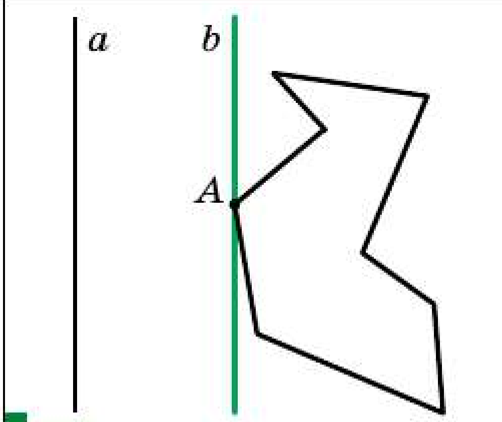


Рис. 6.2

В правильном треугольнике существует точка, равноудалённая от всех его вершин и от всех его сторон. Это точка пересечения биссектрис правильного треугольника. Точка пересечения диагоналей квадрата также обладает аналогичным свойством. То, что в любом правильном многоугольнике существует точка, равноудалённая как от всех его вершин, так и от всех его сторон, подтверждает следующая теорема.

Теорема 6.2

Любой правильный многоугольник является как вписанным, так и описанным, причём центры его описанной и вписанной окружностей совпадают.

Доказательство

На рисунке 6.3 изображён правильный n-угольник $A_1A_2A_3...A_n$.

Проведём биссектрисы углов A_1 и A_2. Пусть O — точка их пересечения. Соединим точки O и A_3. Так как в треугольниках OA_1A_2 и OA_2A_3 углы 2 и 3 равны, а также $A_1A_2 = A_2A_3$ и OA_2 — общая сторона, то эти треугольники равны по первому признаку равенства треугольников. Кроме того, углы 1 и 2 равны как половины равных углов. Тогда треугольник OA_1A_2 — равнобедренный, следовательно, равнобедренным является треугольник OA_2A_3. Поэтому $OA_1 = OA_2 = OA_3$.

Соединив точку O с вершинами $A_4, A_5, ..., A_{n-1}, A_n$, аналогично можно доказать, что $OA_3 = OA_4 = ... = OA_{n-1} = OA_n$.

Таким образом, для многоугольника $A_1A_2A_3...A_n$ существует точка, равноудалённая от всех его вершин. Это точка O — центр описанной окружности.

Так как равнобедренные треугольники OA_1A_2, OA_2A_3, OA_3A_4, ..., $OA_{n-1}A_n$, OA_nA_1 равны, то равны и их высоты, проведённые из вершины O. Отсюда делаем вывод: точка O равноудалена от всех сторон многоугольника. Следовательно, точка O — центр вписанной окружности. ■

Точку, которая является центром описанной и вписанной окружностей правильного многоугольника, называют **центром правильного многоугольника**.

На рисунке 6.4 изображён фрагмент правильного n-угольника с центром O и стороной AB, длину которой обозначим a_n. Угол AOB называют **центральным углом правильного многоугольника**. Понятно, что $\angle AOB = \frac{360^\circ}{n}$.

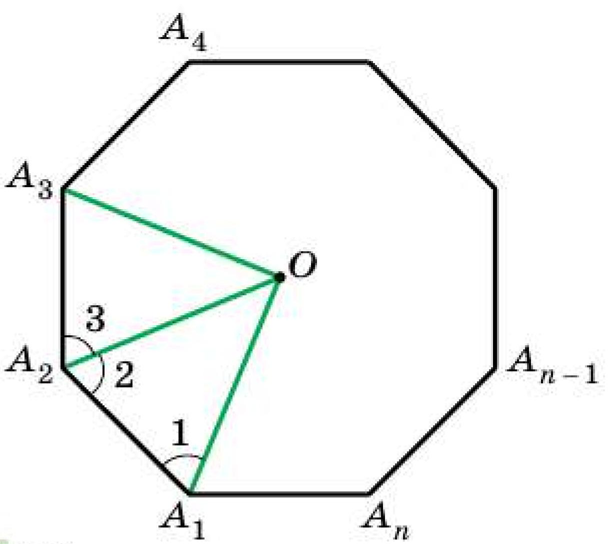


Рис. **6.3**

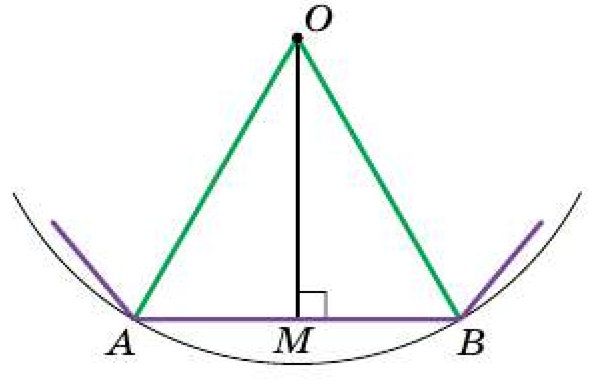


Рис. **6.4**

В равнобедренном треугольнике AOB проведём высоту OM. Тогда $\angle AOM = \angle BOM = \frac{180^\circ}{n}$, $AM = MB = \frac{a_n}{2}$. Из треугольника OMB получаем, что $OB = \dfrac{MB}{\sin\frac{180^\circ}{n}} = \dfrac{a_n}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$ и $OM = \dfrac{MB}{\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}} = \dfrac{a_n}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}$.

Отрезки OB и OM — радиусы соответственно описанной и вписанной окружностей правильного n-угольника. Если их длины обозначить R_n и r_n соответственно, то полученные результаты можно записать в виде формул:

$$R_n = \frac{a_n}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$$

$$r_n = \frac{a_n}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}$$

Подставив в эти формулы вместо n числа 3, 4, 6, получим формулы для нахождения радиусов описанной и вписанной окружностей для правильных треугольника, четырёхугольника и шестиугольника со стороной a.

Количество сторон правильного n-угольника	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
Радиус описанной окружности	$R_3 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$	$R_4 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$	$R_6 = a$
Радиус вписанной окружности	$r_3 = \frac{a\sqrt{3}}{6}$	$r_4 = \frac{a}{2}$	$r_6 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Из полученных формул следует, что сторона правильного шестиугольника равна радиусу его описанной окружности. Тогда получаем простой алгоритм построения правильного шестиугольника: от произвольной точки M окружности надо последовательно откладывать хорды, равные радиусу (рис. 6.5). Таким образом получаем вершины правильного шестиугольника.

Соединив через одну вершины правильного шестиугольника, получим правильный треугольник (рис. 6.6).

Для построения правильного четырёхугольника достаточно в окружности провести два перпендикулярных диаметра AC и BD (рис. 6.7). Тогда четырёхугольник $ABCD$ — квадрат (докажите это самостоятельно).

Если построен правильный n-угольник, то легко построить правильный $2n$-угольник. Для этого надо найти середины всех сторон

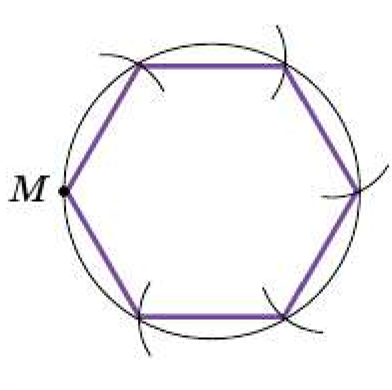


Рис. 6.5

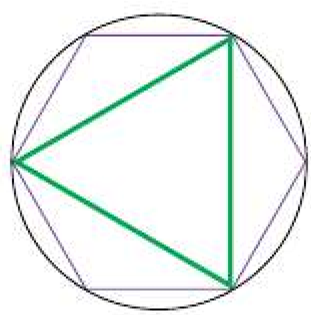


Рис. 6.6

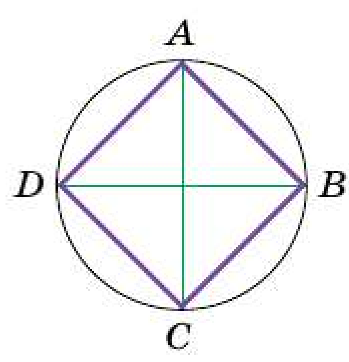


Рис. 6.7

n-угольника и провести радиусы описанной окружности через полученные точки. Тогда концы радиусов и вершины данного n-угольника будут вершинами правильного $2n$-угольника. На рисунках 6.8 и 6.9 показано построение правильных 8-угольника и 12-угольника.

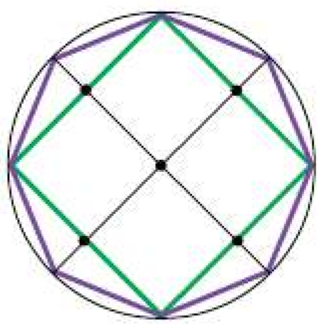


Рис. 6.8

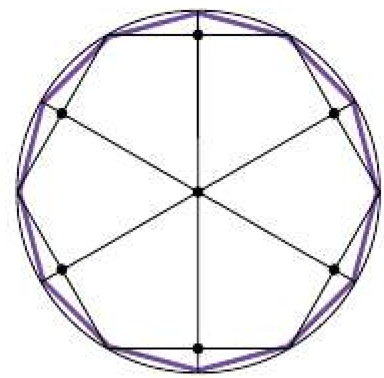


Рис. 6.9

Вообще, если вы умеете строить правильный m-угольник, то сможете построить любой правильный $m \cdot 2^n$-угольник (n — натуральное).

Задачу построения правильных многоугольников с помощью циркуля и линейки изучали ещё древнегреческие геометры. В частности, помимо указанных выше многоугольников, они умели строить правильные 5-угольник и 15-угольник — задачи довольно непростые.

Древние учёные, умевшие строить любой из правильных n-угольников, где $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10$, пытались решить эту задачу и для $n = 7, 9$. Им это не удалось. Вообще, более двух тысяч лет математики не могли продвинуться в решении этой проблемы. Лишь в 1796 г. великий немецкий математик Карл Фридрих Гаусс смог доказать, что с помощью циркуля и линейки построить правильные 7-угольник и 9-угольник нельзя. В 1801 г. Гаусс доказал, что с помощью циркуля и линейки можно построить правильный n-угольник тогда и только тогда, когда $n = 2^k$, где $k \in \boldsymbol{N}$, $k > 1$, или $n = 2^k \cdot p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_t$, где k — целое неотрицательное число, $p_1, p_2, \ldots, p_t$ — различные простые числа вида $2^{2^m} + 1$ (где m — целое неотрицательное число), которые называют простыми числами Ферма. Сейчас известны лишь пять простых чисел Ферма: 3, 5, 17, 257, 65 537.

Гауссу удалось построить правильный 17-угольник. Он придавал этому открытию очень большое значение. Учёный завещал изобразить 17-угольник на своём надгробии. На могильной плите Гаусса этого рисунка нет, но памятник, воздвигнутый Гауссу в Брауншвейге, стоит на семнадцатиугольном постаменте.

Карл Фридрих Гаусс (1777—1855)

Труды Гаусса оказали значительное влияние на развитие алгебры, теории чисел, дифференциальной геометрии, теории электричества и магнетизма, геодезии, теоретической астрономии.

Задача 1. Существует ли правильный многоугольник, угол которого равен: 1) 177°; 2) 155°? В случае утвердительного ответа укажите вид многоугольника.

Решение. 1) Пусть n — количество сторон искомого правильного многоугольника. С одной стороны, сумма его углов равна $180°(n - 2)$. С другой стороны, эта сумма равна $177°n$. Следовательно, $180°(n - 2) = 177°n$.

Отсюда $180°n - 360° = 177°n$; $n = 120$.

2) Имеем: $180°(n - 2) = 155°n$; $25°n = 360°$; $n = 14{,}4$, что невозможно, так как n должно быть натуральным числом.

Ответ: 1) существует, это — стодвадцатиугольник; 2) не существует. ■

Задача 2. В окружность вписан правильный треугольник со стороной 18 см. Найдите сторону правильного шестиугольника, описанного около этой окружности.

Решение. Радиус окружности, описанной около правильного треугольника (рис. 6.10), вычисляется по формуле $R_3 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, где a — длина стороны треугольника. Следовательно, $R_3 = \frac{18\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3}$ (см).

По условию радиус окружности, вписанной в правильный шестиугольник, равен радиусу окружности, описанной около правильного треугольника, т. е. $r_6 = R_3 = 6\sqrt{3}$ см. Так как $r_6 = \frac{b\sqrt{3}}{2}$, где b — длина стороны правильного шестиугольника, то $b = \frac{2r_6}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 6\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 12$ (см).

Ответ: 12 см. ■

Задача 3. Постройте правильный пятиугольник.

Решение. Рассмотрим правильный пятиугольник $ABCDE$, сторона которого равна a. Пусть диагонали AC и BE пересекаются в точке M (рис. 6.11). Легко доказать, что $AC \parallel ED$ и $BE \parallel CD$. Следовательно, четырёхугольник $EMCD$ — параллелограмм. Отсюда $MC = ED = a$.

Треугольники AMB и ABC подобны по первому признаку подобия треугольников (докажите это самостоятельно). Отсюда $\frac{AB}{AC} = \frac{AM}{AB}$. Поскольку $AM = AC - a$, то: $\frac{a}{AC} = \frac{AC - a}{a}$. Отсюда $AC^2 - a \cdot AC - a^2 = 0$; $AC = \frac{a(\sqrt{5}+1)}{2}$.

Как при заданном отрезке длиной a построить отрезок, длина которого равна $a\sqrt{5}$, показано на рисунке 6.12.

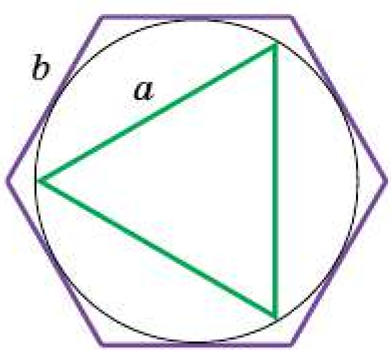


Рис. 6.10

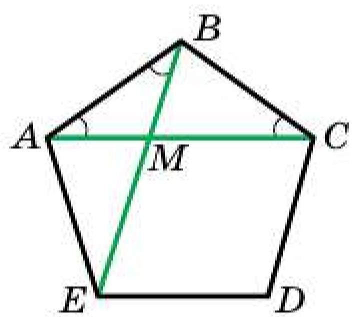


Рис. 6.11

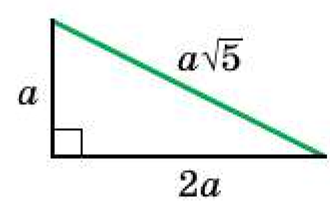


Рис. 6.12

Теперь можно построить отрезок $AC = \frac{a\sqrt{5}}{2} + \frac{a}{2}$.

Итак, мы можем построить по трём сторонам треугольник ABC, в котором стороны AB и AC — это стороны правильного пятиугольника, отрезок AC — его диагональ. Теперь легко завершить построение правильного пятиугольника (сделайте это самостоятельно). ■

Число $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, равное отношению диагонали правильного пятиугольника к его стороне, принято обозначать греческой буквой φ и называть **золотым числом**. Более подробно о роли числа φ в науке и искусстве вы сможете узнать, если примете участие в работе над проектом «Золотое сечение».

Задача 4. Существует ли выпуклый семиугольник, в котором любая сторона перпендикулярна какой-либо диагонали?

Решение. В правильном восьмиугольнике для любой стороны найдётся перпендикулярная ей диагональ. Докажите это самостоятельно.

Проведём диагональ A_1A_3 правильного восьмиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ (рис. 6.13). Очевидно, что семиугольник $A_1A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ обладает нужным свойством. ■

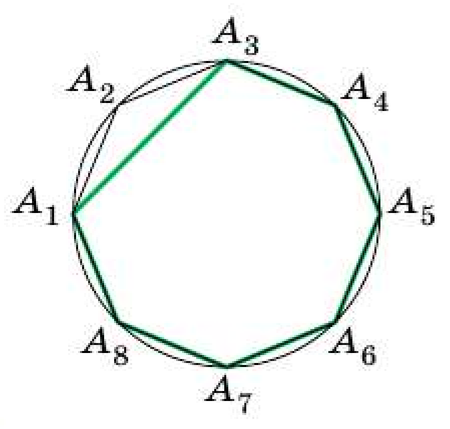


Рис. **6.13**

?

1. Какой многоугольник называют правильным?
2. Каким общим свойством обладают все правильные многоугольники?
3. Что называют центром правильного многоугольника?
4. Запишите формулы радиусов описанной и вписанной окружностей правильного n-угольника, треугольника, четырёхугольника, шестиугольника.

Упражнения

6.1. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, угол которого равен: 1) 160°; 2) 171°?

6.2. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, угол которого равен: 1) 108°; 2) 175°?

6.3. Существует ли правильный многоугольник, угол которого равен: 1) 140°; 2) 130°?

6.4. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если угол, смежный с углом многоугольника, составляет $\frac{1}{9}$ угла многоугольника?

6.5. Определите количество сторон правильного многоугольника, если его угол на 168° больше смежного с ним угла.

6.6. Пусть a_3 — длина стороны правильного треугольника, R и r — соответственно радиусы его описанной и вписанной окружностей. Заполните таблицу (длины даны в сантиметрах):

a_3	R	r
$6\sqrt{3}$		
	$4\sqrt{3}$	
		2

6.7. Пусть a_4 — длина стороны квадрата, R и r — соответственно радиусы его описанной и вписанной окружностей. Заполните таблицу (длины даны в сантиметрах):

a_4	R	r
8		
	4	
		$\sqrt{2}$

6.8. Радиус окружности равен 12 см. Найдите сторону вписанного в эту окружность правильного: 1) шестиугольника; 2) двенадцатиугольника.

6.9. Радиус окружности равен $8\sqrt{3}$ см. Найдите сторону описанного около этой окружности правильного шестиугольника.

6.10. Сторона правильного многоугольника равна a, радиус описанной окружности равен R. Найдите радиус вписанной окружности.

6.11. Радиусы вписанной и описанной окружностей правильного многоугольника равны соответственно r и R. Найдите сторону многоугольника.

6.12. Сторона правильного многоугольника равна a, радиус вписанной окружности равен r. Найдите радиус описанной окружности.

6.13. Около окружности описан правильный шестиугольник со стороной $4\sqrt{3}$ см. Найдите сторону квадрата, вписанного в эту окружность.

6.14. В окружность вписан квадрат со стороной $6\sqrt{2}$ см. Найдите сторону правильного треугольника, описанного около этой окружности.

6.15. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, угол которого на $36°$ больше его центрального угла?

6.16. Угол между радиусами вписанной окружности правильного многоугольника, проведёнными в точки касания этой окружности с соседними сторонами многоугольника, равен $20°$. Найдите количество сторон многоугольника.

6.17. Докажите, что все диагонали правильного пятиугольника равны.

6.18. Докажите, что каждая диагональ правильного пятиугольника параллельна одной из его сторон.

6.19. В окружность вписан и около неё описан правильный шестиугольник. Найдите отношение сторон этих шестиугольников.

6.20. Докажите, что сторона правильного восьмиугольника равна $R\sqrt{2-\sqrt{2}}$, где R — радиус его описанной окружности.

6.21. Докажите, что сторона правильного двенадцатиугольника равна $R\sqrt{2-\sqrt{3}}$, где R — радиус его описанной окружности.

6.22. Найдите площадь правильного восьмиугольника, если радиус описанной около него окружности равен R.

6.23. Найдите диагонали и площадь правильного шестиугольника, сторона которого равна a.

◆ ◆

6.24. Углы квадрата со стороной 6 см срезали так, что получили правильный восьмиугольник. Найдите сторону полученного восьмиугольника.

6.25. Углы правильного треугольника со стороной 24 см срезали так, что получили правильный шестиугольник. Найдите сторону полученного шестиугольника.

6.26. Найдите диагонали правильного восьмиугольника, сторона которого равна a.

6.27. В правильном двенадцатиугольнике, сторона которого равна a, последовательно соединили середины шести сторон, взятых через одну. Найдите сторону образовавшегося при этом правильного шестиугольника.

6.28. В правильном восьмиугольнике, сторона которого равна a, последовательно соединили середины четырёх сторон, взятых через одну. Найдите сторону образовавшегося при этом квадрата.

6.29. В окружность радиуса R вписаны правильный n-угольник и правильный $2n$-угольник. Докажите, что $a_{2n}^2 = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}$.

6.30. На сторонах правильного n-угольника во внешнюю сторону построены квадраты. Известно, что $2n$-угольник, образованный вершинами этих квадратов, отличными от вершин n-угольника, является правильным. При каких значениях n это возможно?

6.31. Дан правильный пятиугольник $ABCDE$. Отметили точку M такую, что треугольник DEM — правильный. Найдите угол AMC.

6.32. Все углы вписанного шестиугольника равны. Можно ли утверждать, что этот шестиугольник правильный?

6.33. В правильном шестиугольнике вычислите: 1) угол между диагоналями, выходящими из одной вершины; 2) угол между наименьшими пересекающимися диагоналями.

6.34. Докажите, что сумма расстояний от любой точки, взятой внутри правильного многоугольника, до всех прямых, содержащих его стороны, является величиной постоянной.

6.35. Диагонали AC и BD правильного пятиугольника $ABCDE$ пересекаются в точке M. Докажите, что $AM^2 = AC \cdot MC$.

6.36. Дан правильный 30-угольник $A_1A_2...A_{30}$ с центром O. Найдите угол между прямыми OA_3 и A_1A_4.

6.37. Существует ли правильный n-угольник, у которого одна из диагоналей равна сумме длин двух других диагоналей?

6.38. Дан правильный десятиугольник $A_1A_2...A_{10}$, вписанный в окружность радиуса R. Найдите разность $A_1A_4 - A_1A_2$.

6.39. Докажите, что если в пятиугольник, у которого все стороны равны, можно вписать окружность, то он является правильным.

6.40. Докажите, что если в пятиугольник, у которого все углы равны, можно вписать окружность, то он является правильным.

6.41. Докажите, что площадь правильного восьмиугольника равна произведению наибольшей и наименьшей диагоналей.

6.42. Форму каких равных правильных многоугольников могут иметь дощечки паркета, чтобы ими можно было выстлать пол?

6.43. Нарисован правильный шестиугольник, сторона которого равна 1. Пользуясь только линейкой, постройте отрезок длиной $\sqrt{7}$.

6.44. На окружности с центром в точке O отметили точки A и B так, что $OA \perp OB$. Точка E — середина отрезка OA. На диаметре AD отметили точку F так, что $EF = EB$ (рис. 6.14). Докажите, что отрезок BF равен стороне правильного пятиугольника, вписанного в данную окружность[1].

6.45. Все углы вписанного пятиугольника равны. Можно ли утверждать, что этот многоугольник является правильным?

6.46. Каждую точку окружности покрасили в один из двух цветов: красный или синий. Докажите, что в эту окружность можно вписать равнобедренный треугольник, все вершины которого одного цвета.

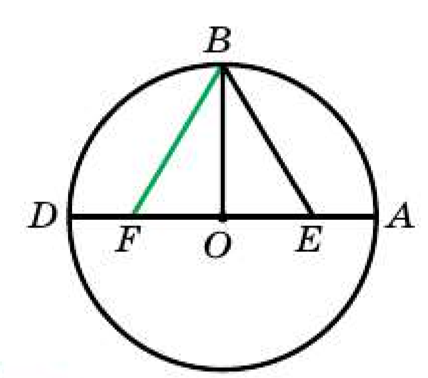


Рис. 6.14

[1] Эта задача показывает, как с помощью циркуля и линейки построить правильный пятиугольник. Это построение описано в работе «Альмагест» древнегреческого учёного Птолемея.

6.47. В правильном 15-угольнике произвольным образом отметили 7 вершин. Докажите, что среди отмеченных точек найдутся три, которые являются вершинами равнобедренного треугольника.

6.48. Все углы пятиугольника равны. Докажите, что сумма расстояний от любой точки пятиугольника до его сторон является величиной постоянной.

§ 7 Длина окружности. Площадь круга

Как на практике измерить длину линии, изображённой на рисунке 7.1?

Можно, например, отметить несколько точек на линии, а потом последовательно соединить их отрезками так, как показано на рисунке 7.2. Потом найти длину образовавшейся ломаной. Полученная величина приближённо равна длине данной линии. Понятно, что если уменьшать длины всех звеньев ломаной и увеличивать их количество (рис. 7.3), то результат измерения длины данной линии будет становиться более точным.

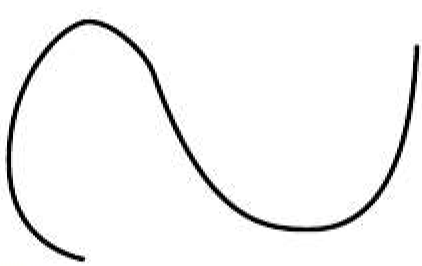


Рис. 7.1

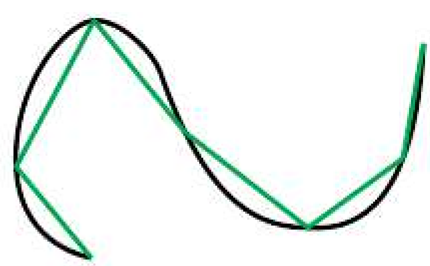


Рис. 7.2

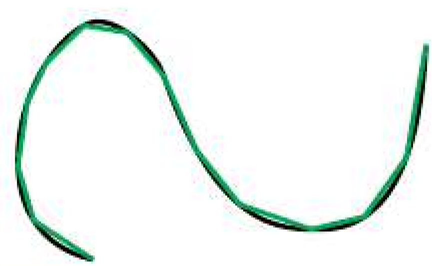


Рис. 7.3

Говорят, что длина линии, изображённой на рисунке 7.3, приближённо измерена с помощью длины **ломаной, вписанной в данную линию.**

Для измерения длины окружности в качестве вписанной ломаной удобно использовать ломаную, состоящую из сторон правильного n-угольника, вписанного в эту окружность.

На рисунке 7.4 изображены правильные 4-угольник, 8-угольник и 16-угольник, вписанные в окружность.

Мы видим, что при увеличении количества сторон правильного n-угольника его периметр P_n всё меньше и меньше отличается от длины C описанной окружности.

Так, для нашего примера можно записать:

$C - P_4 > C - P_8 > C - P_{16}$ и т. д.

При неограниченном увеличении количества сторон правильного многоугольника его периметр будет сколь угодно мало отличаться от длины окружности. Это означает, что разность $C - P_n$ можно сделать меньшей, чем, например, 10^{-6}, 10^{-9}, и вообще, меньшей любого положительного числа.

Рассмотрим два правильных n-угольника с длинами сторон a_n и a'_n, вписанных в окружности, радиусы которых равны R и R' соответственно (рис. 7.5). Тогда их периметры P_n и P'_n можно вычислить по формулам:

$$P_n = na_n = n \cdot 2R\sin\frac{180^\circ}{n},$$

$$P'_n = na'_n = n \cdot 2R'\sin\frac{180^\circ}{n}.$$

Отсюда

$$\frac{P_n}{P'_n} = \frac{2R}{2R'}. \qquad (1)$$

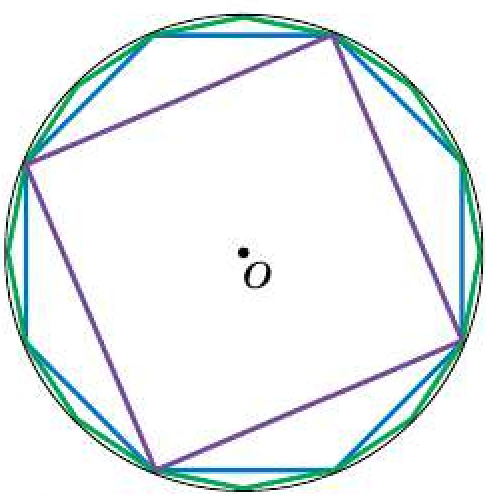


Рис. 7.4

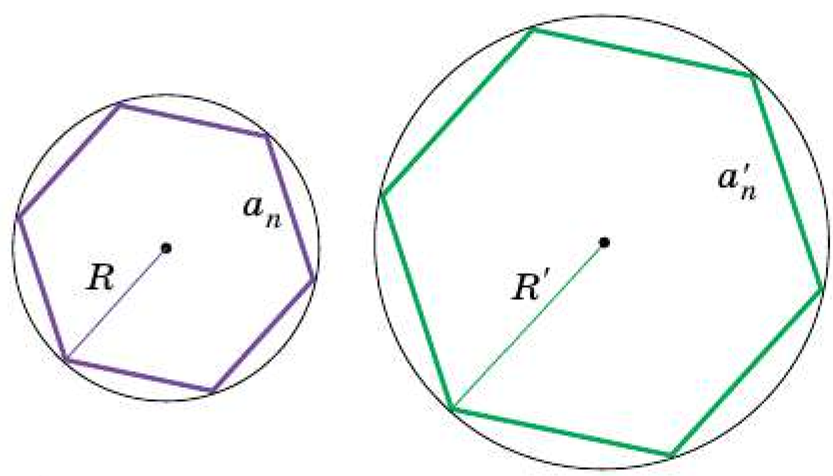


Рис. 7.5

Это равенство справедливо при любом значении n (n — натуральное число, $n \geqslant 3$). При неограниченном увеличении n периметры P_n и P'_n соответственно будут сколь угодно мало отличаться от длин C и C' описанных окружностей. Тогда при неограниченном увеличении n отношение $\frac{P_n}{P'_n}$ будет сколь угодно мало отличаться от отношения $\frac{C}{C'}$. С учётом равенства (1) приходим к выводу, что число $\frac{2R}{2R'}$ сколь угодно мало отличается от числа $\frac{C}{C'}$. А это возможно лишь тогда, когда $\frac{C}{C'} = \frac{2R}{2R'}$ или $\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}$.

Последнее равенство означает, что ***для всех окружностей отношение длины окружности к диаметру есть одно и то же число.***

Вы знаете, что это число принято обозначать греческой буквой π (читают: «пи»).

Из равенства $\frac{C}{2R} = \pi$ получаем формулу для вычисления длины окружности:

$$\boxed{C = 2\pi R}$$

Число π иррациональное, а значит, оно может быть представлено в виде конечной десятичной дроби лишь приближённо. Обычно при решении задач в качестве приближённого значения π принимают число 3,14.

Великий древнегреческий учёный Архимед (III в. до н. э.), выразив через диаметр описанной окружности периметр правильного 96-угольника, установил, что $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Отсюда и следует, что $\pi \approx 3{,}14$.

С помощью современных компьютеров и специальных программ можно вычислить число π с огромной точностью. Приведём запись числа π с 47 цифрами после запятой:

$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419716939937...$.

В 1992 г. число π вычислили с точностью до 1 011 196 691 цифры после запятой. Этот факт был занесен в Книгу рекордов Гиннеса. В 2016 г. было вычислено уже более 22 триллионов знаков этого числа.

Найдём формулу для вычисления длины дуги окружности с градусной мерой $n°$. Поскольку градусная мера всей окружности равна 360°, то длина дуги в 1° равна $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$. Тогда длину l дуги в $n°$ вычисляют по формуле

$$\boxed{l = \frac{\pi R n}{180}}$$

До сих пор вам приходилось вычислять площади многоугольников или фигур, которые можно разбить на несколько многоугольников. Заметим, что круг таким свойством не обладает.

Рассмотрим, как на практике можно измерить площадь фигуры, изображённой на рисунке 7.6. В эту фигуру вписывают многоугольник (рис. 7.7). Его площадь является приближённым значением площади данной фигуры. Если уменьшать длины всех сторон многоугольника, при этом увеличивая их количество (рис. 7.8), то резуль-

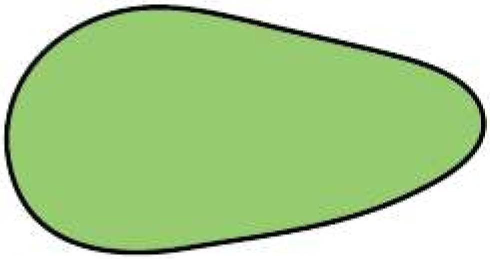


Рис. 7.6

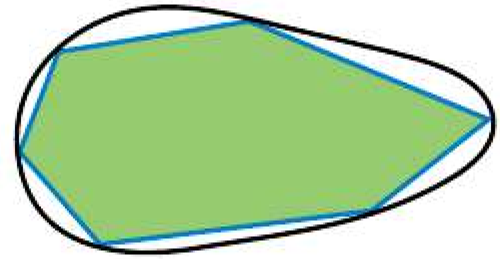


Рис. 7.7

тат измерения площади данной фигуры будет становиться всё более точным.

Воспользуемся этой идеей для нахождения площади круга.

Опять-таки, обратимся к рисунку 7.4. Мы видим, что при увеличении количества сторон правильного n-угольника его площадь S_n всё меньше и меньше отличается от площади S круга. При неограниченном увеличении количества сторон его площадь стремится к площади круга.

На рисунке 7.9 изображён фрагмент правильного n-угольника с центром в точке O, со стороной $AB = a_n$ и радиусом описанной окружности, равным R. Опустим перпендикуляр OM на сторону AB. Имеем: $S_{AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot OM = \frac{1}{2} a_n R \cos\frac{180^\circ}{n}$.

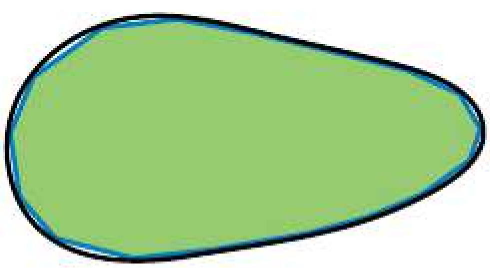


Рис. 7.8

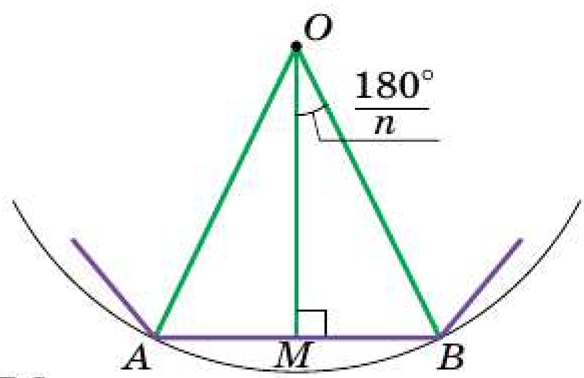


Рис. 7.9

Поскольку радиусы, проведённые в вершины правильного n-угольника, разбивают его на n равных треугольников, то площадь n-угольника S_n в n раз больше площади треугольника AOB. Тогда $S_n = n \cdot S_{AOB} = \frac{1}{2} n a_n R \cos\frac{180^\circ}{n}$. Отсюда

$$S_n = \frac{1}{2} P_n \cdot R \cos\frac{180^\circ}{n}, \qquad (2)$$

где P_n — периметр данного правильного n-угольника.

При неограниченном увеличении значения n величина $\frac{180^\circ}{n}$ будет сколь угодно мало отличаться от 0°, а следовательно, $\cos\frac{180^\circ}{n}$ будет стремиться к 1. Периметр P_n будет стремиться к длине C окружности, а площадь S_n — к площади S круга. Отсюда с учётом равенства (2) можно записать: $S = \frac{1}{2}C \cdot R$.

Из этого равенства получаем формулу для нахождения площади круга:

$$\boxed{S = \pi R^2}$$

Заметим, что доказательства формул для нахождения длины окружности и площади круга не являются строгими. С выводом этих формул вы сможете ознакомиться, если примете участие в работе над проектом «Что такое длина кривой и площадь фигуры?».

На рисунке 7.10 радиусы OA и OB делят круг на две части, закрашенные разными цветами. Каждую из этих частей вместе с радиусами OA и OB называют **круговым сектором** или просто **сектором**.

Понятно, что круг радиуса R можно разделить на 360 равных секторов, каждый из которых будет содержать дугу в $1°$. Площадь такого сектора равна $\frac{\pi R^2}{360}$. Тогда площадь S сектора, содержащего дугу окружности в $n°$, вычисляют по формуле:

$$\boxed{S = \frac{\pi R^2 n}{360}}$$

На рисунке 7.11 хорда AB делит круг на две части, закрашенные разными цветами. Каждую из этих частей вместе с хордой AB называют **круговым сегментом** или просто **сегментом**. Хорду AB при этом называют **основанием сегмента**.

Чтобы найти площадь сегмента, закрашенного фиолетовым цветом (рис. 7.12), надо из площади сектора, содержащего хорду AB, вычесть площадь треугольника AOB (точка O — центр круга). Чтобы найти площадь сегмента, закрашенного зелёным цветом, надо к площади сектора, не содержащего хорду AB, прибавить площадь треугольника AOB.

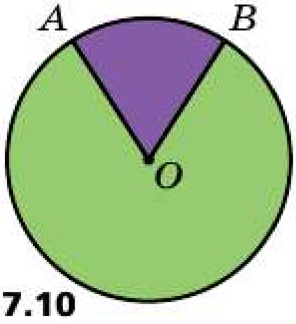


Рис. 7.10

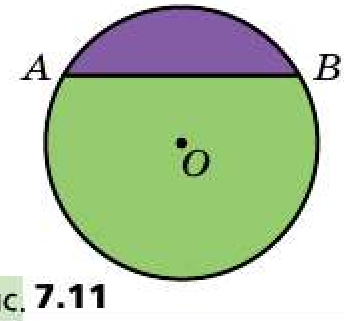


Рис. 7.11

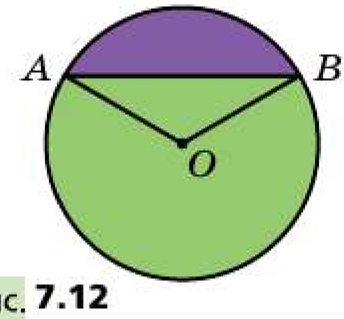


Рис. 7.12

Если хорда AB является диаметром круга, то она делит круг на два сегмента, которые называют **полукругами**. Площадь S полукруга вычисляют по формуле $S = \frac{\pi R^2}{2}$, где R — радиус круга.

С поиском формулы для нахождения площади круга связана одна из знаменитых задач древности — **задача о квадратуре круга**: построить с помощью циркуля и линейки квадрат, площадь которого равна площади данного круга.

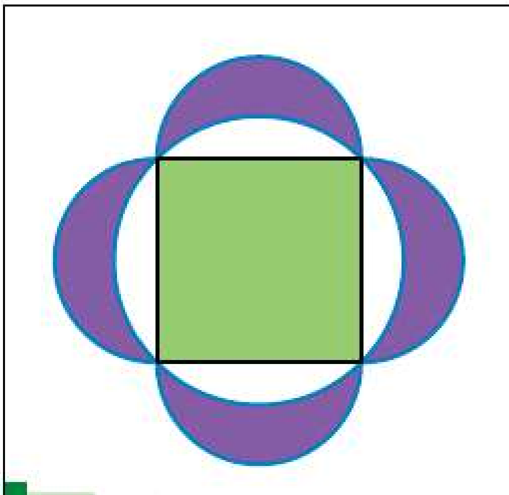


Рис. **7.13**

Начиная с учёных Древней Греции, эту задачу пытались решить математики многих поколений. Вдохновение для своих поисков они во многом черпали из результатов, полученных Гиппократом Хиосским: ещё в V в. до н. э. Гиппократ нашёл ряд криволинейных фигур, равновеликих некоторым многоугольникам.

Рассмотрим одно из его построений.

Опишем около квадрата окружность, а на каждой его стороне построим полуокружность во внешнюю сторону (рис. 7.13). Фигуры, выделенные на рисунке 7.13 фиолетовым цветом, называют **луночками Гиппократа**. Легко показать (сделайте это самостоятельно), что сумма площадей этих луночек равна площади данного квадрата.

Попытки решить задачу о квадратуре круга прекратились лишь в конце XIX в., когда была доказана невозможность её решения.

Задача 1. Длина дуги окружности, радиус которой 25 см, равна π см. Найдите градусную меру дуги.

Решение. Из формулы $l = \frac{\pi R n}{180}$ получаем $n = \frac{180 l}{\pi R}$. Следовательно, искомая градусная мера $n^\circ = \left(\frac{180\pi}{\pi \cdot 25}\right)^\circ = 7{,}2^\circ$.

Ответ: $7{,}2^\circ$. ■

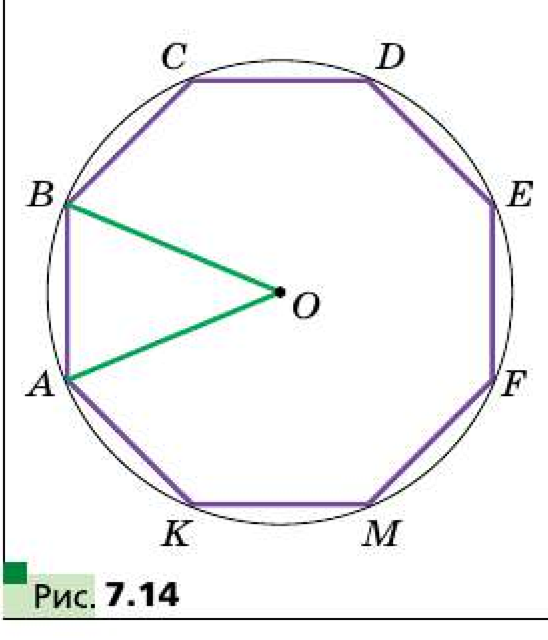


Рис. **7.14**

Задача 2. В окружность с центром O, радиус которой равен 8 см, вписан правильный восьмиугольник $ABCDEFMK$ (рис. 7.14). Найдите площади сектора и сегмента, содержащих дугу AB.

Решение. Угол AOB — центральный угол правильного восьмиугольника, $\angle AOB = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$.

Тогда искомая площадь сектора равна $S_{\text{сект}} = \frac{\pi \cdot 8^2 \cdot 45}{360} = 8\pi$ (см^2), площадь сегмента $S_{\text{сегм}} = S_{\text{сект}} - S_{AOB} = 8\pi - \frac{1}{2} OA^2 \sin \angle AOB = 8\pi - 16\sqrt{2}$ (см^2).

Ответ: 8π см^2, $(8\pi - 16\sqrt{2})$ см^2. ■

1. Какое отношение обозначают буквой π?
2. Назовите приближённое значение числа π с точностью до сотых.
3. По какой формуле вычисляют длину окружности?
4. По какой формуле вычисляют длину дуги окружности?
5. По какой формуле вычисляют площадь круга?
6. Объясните, какую геометрическую фигуру называют круговым сектором.
7. По какой формуле вычисляют площадь кругового сектора?
8. Объясните, какую геометрическую фигуру называют круговым сегментом.
9. Объясните, как можно найти площадь кругового сегмента.

Упражнения

7.1. Вычислите длину зелёной линии, изображённой на рисунке 7.15.

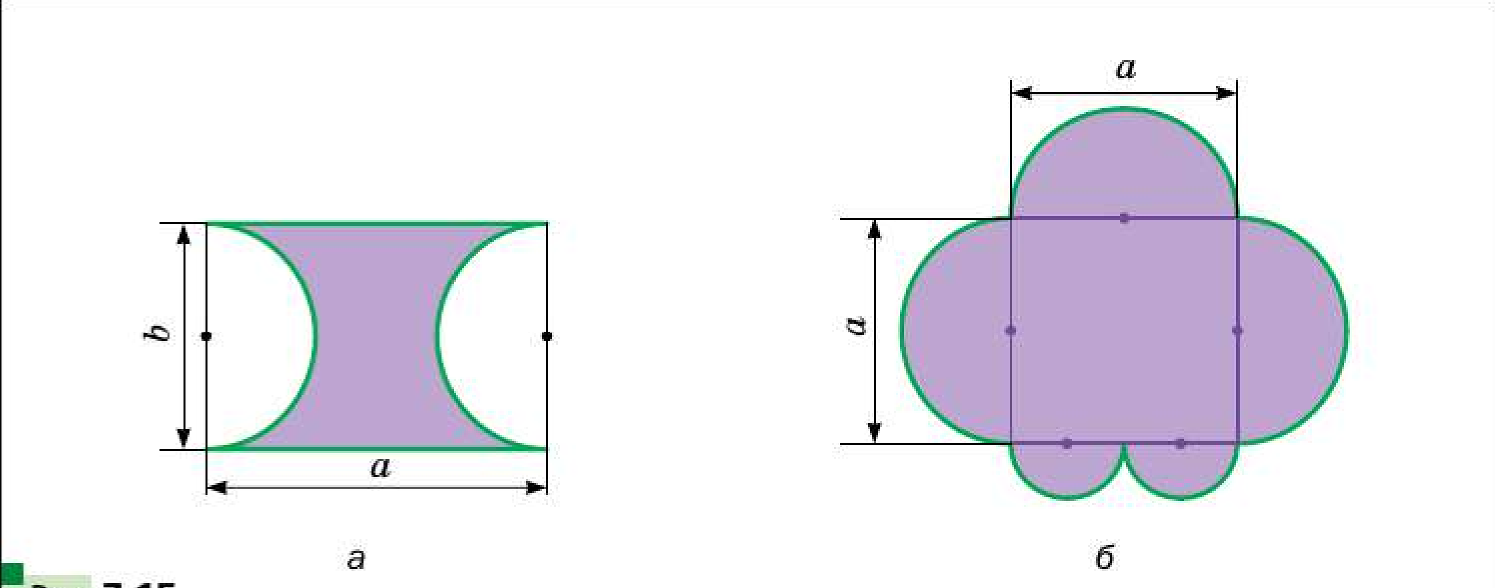


Рис. 7.15

7.2. Вычислите площадь закрашенной фигуры, изображённой на рисунке 7.16.

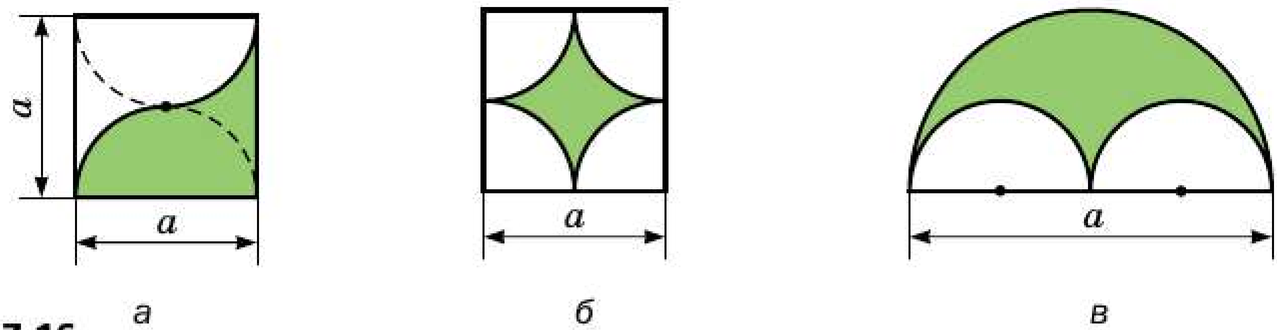


Рис. 7.16

7.3. Найдите площадь круга, описанного около равнобедренного треугольника с боковой стороной b и углом α при основании.

7.4. Найдите длину окружности, описанной около прямоугольника со стороной a и углом α между данной стороной и диагональю прямоугольника.

7.5. Радиус окружности равен 8 см. Найдите длину дуги окружности, градусная мера которой равна: 1) $4°$; 2) $18°$; 3) $160°$; 4) $320°$.

7.6. Длина дуги окружности равна 12π см, а её градусная мера — $27°$. Найдите радиус окружности.

7.7. Длина дуги окружности радиуса 24 см равна 3π см. Найдите градусную меру дуги.

7.8. Вычислите длину дуги экватора Земли, градусная мера которой равна $1°$, если радиус экватора приближённо равен 6400 км.

7.9. Северный полярный круг пересекает границы России в точках, восточная долгота которых равна $29°$ и $169°$. Найдите длину дуги Северного полярного круга, принадлежащую России, если длина окружности Северного полярного круга с точностью до сотен километров равна 15 900 км. Ответ округлите с точностью до сотен километров.

7.10. Радиус круга равен 6 см. Найдите площадь сектора, если градусная мера его дуги равна: 1) $15°$; 2) $144°$; 3) $280°$.

7.11. Площадь сектора составляет $\frac{5}{8}$ площади круга. Найдите градусную меру его дуги.

7.12. Площадь сектора равна 6π дм^2. Найдите градусную меру дуги этого сектора, если радиус круга равен 12 дм.

7.13. Площадь сектора равна $\frac{5\pi}{4}$ см^2, а градусная мера дуги этого сектора составляет $75°$. Найдите радиус круга, частью которого является данный сектор.

7.14. Найдите площадь кругового сегмента, если радиус круга равен 5 см, а градусная мера дуги сегмента равна: 1) $45°$; 2) $150°$; 3) $330°$.

7.15. Найдите площадь кругового сегмента, если радиус круга равен 2 см, а градусная мера дуги сегмента равна: 1) 60°; 2) 300°.

7.16. Радиус окружности увеличили на a. Докажите, что длина окружности увеличилась на величину, не зависящую от радиуса данной окружности.

7.17. Сторона треугольника равна 6 см, а прилежащие к ней углы равны 50° и 100°. Найдите длины дуг, на которые вершины треугольника делят описанную около него окружность

7.18. Сторона треугольника равна $5\sqrt{3}$ см, а прилежащие к ней углы равны 35° и 25°. Найдите длины дуг, на которые вершины треугольника делят описанную около него окружность.

7.19. На катете AC прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) как на диаметре построена окружность. Найдите длину дуги этой окружности, принадлежащей треугольнику, если $\angle A = 24°$, $AC = 20$ см.

7.20. Угол при основании равнобедренного треугольника равен 70°. На высоте треугольника, проведённой к основанию и равной 27 см, как на диаметре построена окружность. Найдите длину дуги окружности, принадлежащей треугольнику.

7.21. Колёса автомобиля имеют диаметр 65 см. Автомобиль едет с такой скоростью, что колёса делают ежесекундно 6 оборотов. Найдите скорость автомобиля в километрах в час. Ответ округлите до десятых.

7.22. Докажите, что площадь полукруга, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника как на диаметре (рис. 7.17), равна сумме площадей полукругов, построенных на его катетах как на диаметрах.

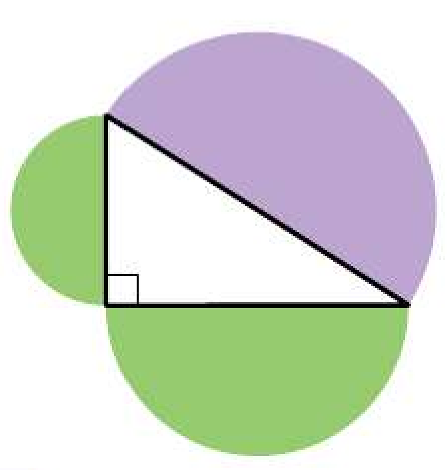


Рис. 7.17

7.23. В круг вписан квадрат со стороной a. Найдите площадь меньшего из сегментов, основанием которых является сторона квадрата.

7.24. В круг вписан правильный треугольник со стороной a. Найдите площадь меньшего из сегментов, основанием которых является сторона треугольника.

7.25. Две водопроводные трубы, диаметры которых равны 30 см и 40 см, надо заменить одной трубой с такой же пропускной способностью[1]. Каким должен быть диаметр этой трубы?

[1] Пропускная способность водопроводной трубы — это масса воды, которая проходит через поперечное сечение трубы за единицу времени.

7.26. Отрезок AB разбили на n отрезков. На каждом из них как на диаметре построили полуокружность. Это действие повторили, разбив данный отрезок на m отрезков. Найдите отношение сумм длин полуокружностей, полученных в первом и во втором случаях.

7.27. В круговой сектор, радиус которого равен R, а центральный угол составляет 60°, вписан круг. Найдите площадь этого круга.

7.28. Найдите площадь розетки (закрашенной фигуры), изображённой на рисунке 7.18, если сторона квадрата $ABCD$ равна a.

7.29. При построении четырёх дуг с центрами в вершинах квадрата $ABCD$ и радиусами, равными стороне a квадрата, образовалась фигура, ограниченная зелёной линией (рис. 7.19). Найдите длину этой линии.

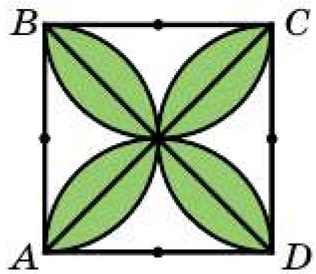


Рис. 7.18

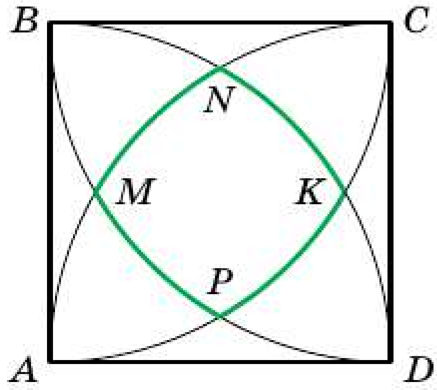


Рис. 7.19

7.30. Найдите длину зелёной линии (рис. 7.20), где точки O_1, O_2, O_3, ... — центры равных окружностей радиуса R.

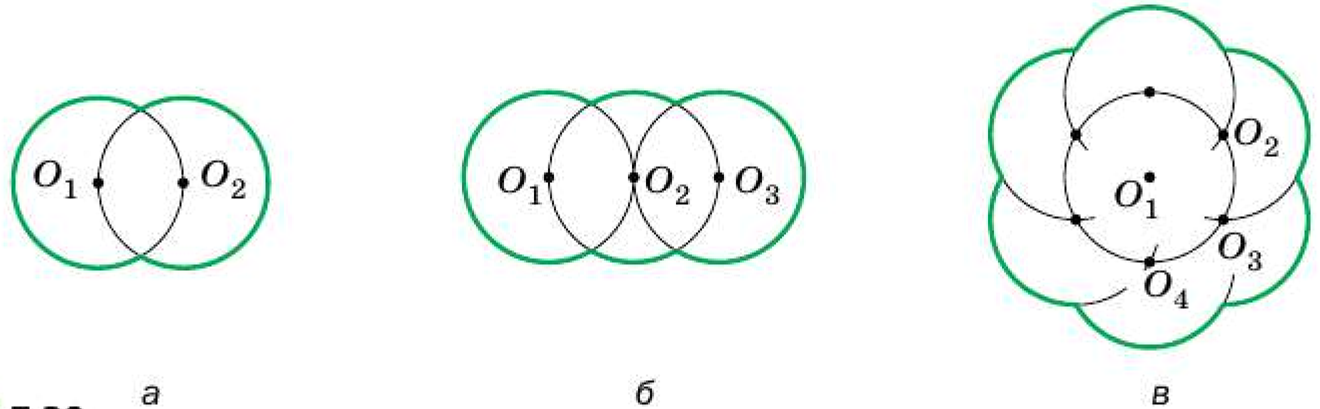


Рис. 7.20

7.31. Даны две окружности, радиусы которых равны R и r ($R > r$). Центр меньшей окружности лежит на большей окружности. Длина дуги меньшей окружности, расположенной внутри большей окружности, равна l. Найдите длину дуги большей окружности, расположенной внутри меньшей окружности.

7.32. На гипотенузе и катетах прямоугольного треугольника как на диаметрах построены полукруги (рис. 7.21). Докажите, что площадь закрашенной фигуры равна площади треугольника.

7.33. Найдите площадь общей части двух кругов с радиусами 1 см и $\sqrt{3}$ см, если расстояние между их центрами равно 2 см.

7.34. Три окружности, радиус каждой из которых равен R, попарно касаются. Вычислите площадь закрашенной фигуры (рис. 7.22).

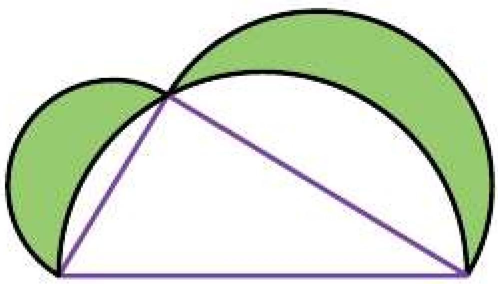


Рис. **7.21**

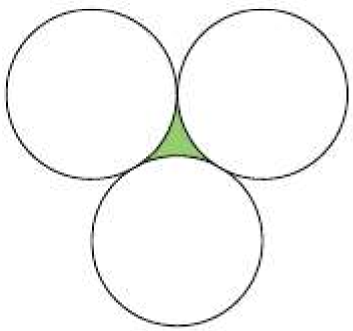


Рис. **7.22**

7.35. На отрезках AB, BC и AC как на диаметрах построены полукруги (рис. 7.23). Отрезки MB и AC перпендикулярны. Докажите, что площадь закрашенной фигуры (её называют **а́рбелос Архимеда**) равна $\frac{1}{4}\pi MB^2$.

7.36. Хорда AB большей из двух концентрических окружностей касается меньшей окружности (рис. 7.24). Найдите площадь закрашенного кольца, если $AB = a$.

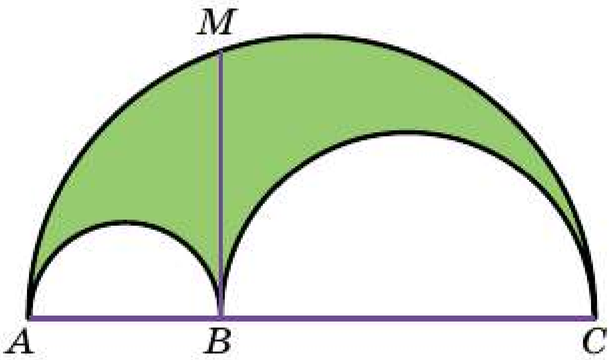


Рис. **7.23**

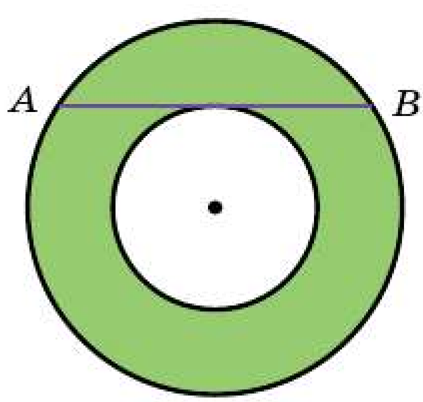


Рис. **7.24**

7.37. Постройте круг, площадь которого равна сумме площадей двух данных кругов.

7.38. Две окружности, радиусы которых равны 4 см и 12 см, касаются внешним образом. Найдите площадь фигуры, ограниченной этими окружностями и их общей касательной (рис. 7.25).

7.39. Два квадрата со сторонами 1 см имеют общий центр (рис. 7.26). Докажите, что площадь их общей части больше, чем $\frac{3}{4}$.

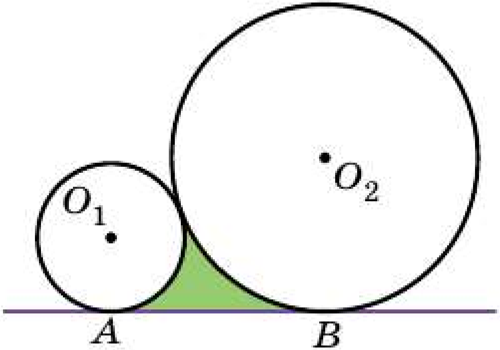


Рис. **7.25**

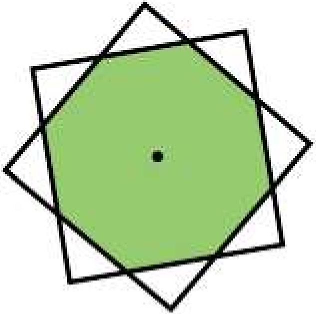


Рис. **7.26**

Итоги главы 2

Правильный многоугольник

Многоугольник называют правильным, если у него все стороны равны и все углы равны.

Свойства многоугольника

- Правильный многоугольник является выпуклым многоугольником.
- Любой правильный многоугольник является как вписанным, так и описанным, причём центры его описанной и вписанной окружностей совпадают. Точку, которая является центром описанной и вписанной окружностей правильного многоугольника, называют центром правильного многоугольника.

Формулы для нахождения радиусов описанной и вписанной окружностей правильного n-угольника

- Радиус описанной окружности равен $\dfrac{a_n}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$, где R_n — радиус описанной окружности со стороной a_n.
- Радиус вписанной окружности равен $\dfrac{a_n}{2\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}}$, где r_n — радиус вписанной окружности со стороной a_n.

Количество сторон правильного n-угольника	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
Радиус описанной окружности	$R_3 = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$	$R_4 = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$	$R_6 = a$
Радиус вписанной окружности	$r_3 = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$	$r_4 = \dfrac{a}{2}$	$r_6 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Длина окружности

$l = 2\pi R.$

Длина дуги в $n°$

$$l_{\text{дуги}} = \frac{\pi R n}{180}.$$

Площадь круга

$$S = \pi R^2.$$

Площадь сектора, содержащего дугу в $n°$

$$S_{\text{сект}} = \frac{\pi R^2 n}{360}.$$

глава

3 Декартовы координаты на плоскости

- В этой главе вы расширите свои знания о координатной плоскости.
- Вы научитесь находить длину отрезка и координаты его середины, зная координаты его концов.
- Сформируете представление об уравнении фигуры, выведете уравнения прямой и окружности.
- Ознакомитесь с методом координат, позволяющим решать геометрические задачи средствами алгебры.

§ 8 Расстояние между двумя точками с данными координатами. Деление отрезка в данном отношении

В курсе математики 6 класса вы познакомились с координатной плоскостью, т. е. с плоскостью, на которой изображены две перпендикулярные координатные прямые (ось абсцисс и ось ординат) с общим началом отсчёта (рис. 8.1). Договоримся координатную плоскость с осью x (осью абсцисс) и осью y (осью ординат) называть **плоскостью** $\boldsymbol{xy}$. Вы умеете отмечать на ней точки по их координатам и, наоборот, находить координаты точки, отмеченной на координатной плоскости.

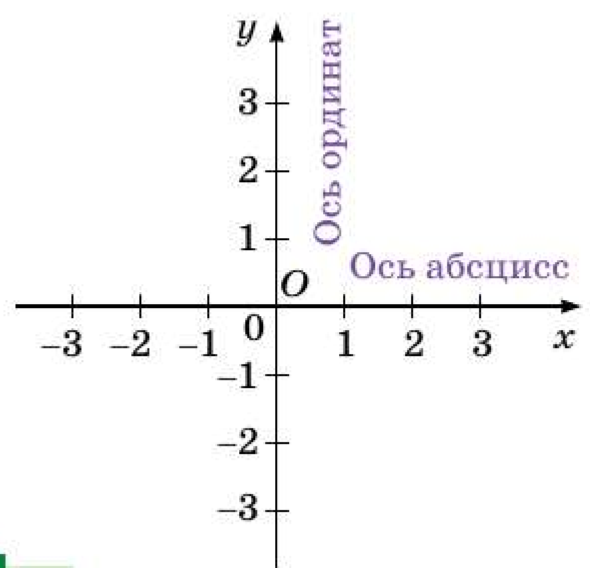


Рис. 8.1

Координаты точки на плоскости xy называют **декартовыми координатами** в честь французского математика Рене Декарта.

Рис. 8.2

Вы знаете, как находить расстояние между двумя точками, заданными своими координатами на координатной прямой. Для точек $A\ (x_1)$ и $B\ (x_2)$ (рис. 8.2) имеем:

$$AB = |x_2 - x_1|.$$

Научимся находить расстояние между точками $A\ (x_1;\ y_1)$ и $B\ (x_2;\ y_2)$, заданными на плоскости xy.

Рассмотрим случай, когда отрезок AB не перпендикулярен ни одной из координатных осей (рис. 8.3).

Через точки A и B проведём прямые, перпендикулярные координатным осям. Получим прямоугольный треугольник ACB. Очевидно, что $BC = |x_2 - x_1|$, $AC = |y_2 - y_1|$. Отсюда $AB^2 = BC^2 + AC^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.

Тогда формулу **расстояния между точками** $A\ (x_1;\ y_1)$ и $B\ (x_2;\ y_2)$ можно записать так:

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Для случая, когда отрезок AB перпендикулярен одной из осей координат, докажите эту формулу самостоятельно.

Если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$, то естественно считать, что $AB = 0$. Этот же результат даёт и полученная формула.

Теорема 8.1

Если точка $M(x_0;\ y_0)$ делит отрезок AB в отношении $\dfrac{AM}{MB} = \lambda$, то координаты этой точки можно вычислить по формулам

$$\boxed{x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},\ y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},} \qquad (1)$$

где $(x_1;\ y_1)$ и $(x_2;\ y_2)$ — координаты соответственно точек A и B.

Доказательство

Рассмотрим случай, когда отрезок AB не перпендикулярен ни одной из координатных осей (рис. 8.4). Будем считать, что $x_2 > x_1$ (слу-

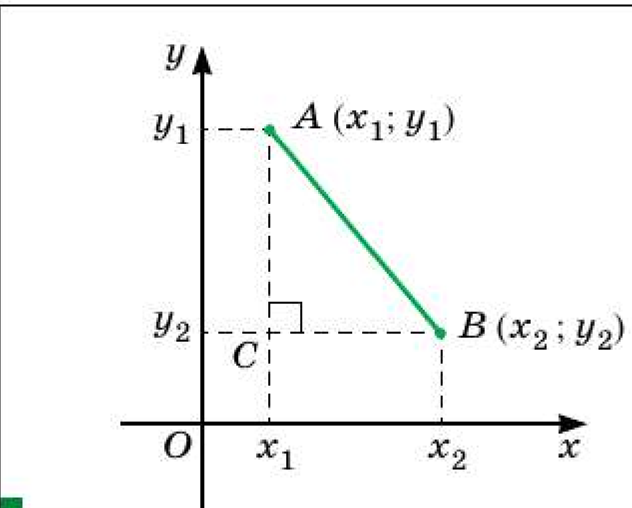


Рис. 8.3

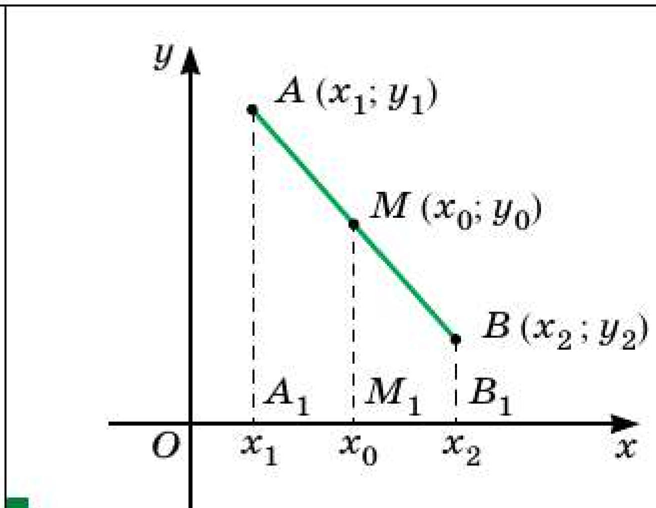


Рис. 8.4

чай, когда $x_2 < x_1$, можно рассмотреть аналогично). Через точки A, M и B проведём прямые, перпендикулярные оси абсцисс, которые пересекут эту ось соответственно в точках A_1, M_1 и B_1. По теореме о пропорциональных отрезках $\frac{A_1M_1}{M_1B_1} = \lambda$, тогда $|x_0 - x_1| = \lambda|x_2 - x_0|$. Поскольку $x_2 > x_0 > x_1$, то можем записать: $x_0 - x_1 = \lambda(x_2 - x_0)$. Отсюда $x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$.

Аналогично можно показать, что $y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$.

Формулы для нахождения координат точки M остаются верными и для случая, когда отрезок AB перпендикулярен одной из осей координат (докажите это самостоятельно). ■

Если точка M является серединой отрезка AB, то $\lambda = \frac{AM}{MB} = 1$. Для этого случая формулы (1) можно записать так:

$$\boxed{x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}}$$

По этим формулам находят **координаты середины отрезка**.

Задача 1. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A\ (2; -1)$, $B\ (1; 3)$, $C\ (-3; 2)$ и $D\ (-2; -2)$ является прямоугольником.

Решение. Пусть точка M — середина диагонали AC. Тогда абсцисса точки M равна $\frac{2-3}{2} = -0{,}5$, а ордината — $\frac{-1+2}{2} = 0{,}5$. Следовательно, $M\ (-0{,}5; 0{,}5)$.

Пусть точка K — середина диагонали BD. Тогда абсцисса точки K равна $\frac{1-2}{2} = -0{,}5$, а ордината — $\frac{3-2}{2} = 0{,}5$. Следовательно, $K\ (-0{,}5; 0{,}5)$.

Теперь можно сделать вывод, что точки M и K совпадают, т. е. диагонали четырёхугольника $ABCD$ имеют общую середину. Отсюда следует, что $ABCD$ — параллелограмм. Используя формулу расстояния между двумя точками, найдём длины диагоналей параллелограмма:

$$AC = \sqrt{(-3-2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{34},\quad BD = \sqrt{(-2-1)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{34}.$$

Следовательно, диагонали параллелограмма $ABCD$ равны. Отсюда следует, что этот параллелограмм является прямоугольником. ■

Задача 2. Дан прямоугольник $ABCD$. Найдите все точки X, для которых выполняется равенство $XA^2 + XC^2 = XB^2 + XD^2$.

Решение. Введём на плоскости систему координат так, чтобы начало координат совпадало с точкой A, а точки B и D принадлежали осям координат (рис. 8.5).

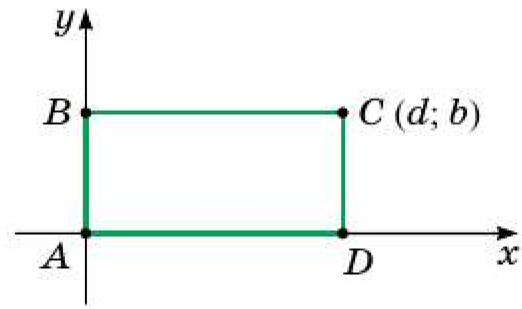


Рис. 8.5

Пусть координаты точки B равны $(0;\ b)$, а координаты точки D — $(d;\ 0)$. Тогда точка C имеет координаты $(d;\ b)$.

Пусть $X\ (x;\ y)$ — произвольная точка координатной плоскости.

Имеем: $XA^2 + XC^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2 + (x-d)^2 + (y-b)^2;$

$XB^2 + XD^2 = (x-0)^2 + (y-b)^2 + (x-d)^2 + (y-0)^2.$

Отсюда $XA^2 + XC^2 = XB^2 + XD^2$, т. е. это равенство выполняется для любой точки X. Отсюда следует, что искомым множеством точек является вся координатная плоскость. ■

Задача 3. Докажите неравенство $\sqrt{x^2 + (1-y)^2} + \sqrt{(1-x)^2 + y^2} \geqslant \sqrt{2}.$

Решение. На плоскости xy рассмотрим точки $A\ (0;\ 1)$ и $B\ (1;\ 0)$.

Пусть $M\ (x;\ y)$ — произвольная точка плоскости. Имеем: $MA = \sqrt{x^2 + (1-y)^2},\ MB = \sqrt{(1-x)^2 + y^2},\ AB = \sqrt{2}.$

Из неравенства треугольника следует, что $MA + MB \geqslant AB$. ■

Задача 4. На бумаге в клетку изображён выпуклый n-угольник так, что все его вершины расположены в узлах сетки и ни один другой узел сетки не принадлежит этому n-угольнику. Докажите, что $n = 3$ или $n = 4$.

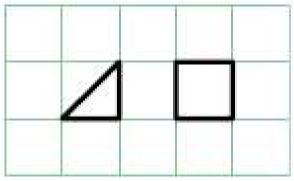


Рис. 8.6

Решение. На рисунке 8.6 изображены треугольник и четырёхугольник, обладающие нужным свойством. Следовательно, мы показали, что для $n = 3$ и $n = 4$ такие n-угольники существуют.

Для любой точки $A\ (x;\ y)$, где $x \in \boldsymbol{Z}$, $y \in \boldsymbol{Z}$, имеет место один из четырёх случаев:

1) x — чётное, y — нечётное;
2) x — нечётное, y — чётное;
3) x — чётное, y — чётное;
4) x — нечётное, y — нечётное.

Введём систему координат так, чтобы все узлы сетки имели целые координаты.

Предположим, что $n \geqslant 5$. Тогда среди вершин n-угольника найдутся такие две, что их соответствующие координаты будут иметь одинаковую чётность. Середина отрезка с концами в этих вершинах принадлежит n-угольнику и имеет целые координаты. Получили противоречие. ■

1. Как найти расстояние между двумя точками, если известны их координаты?
2. Как найти координаты точки, которая делит отрезок в заданном отношении, если известны координаты его концов?

Упражнения

8.1. Вершинами треугольника являются точки A (–1; 3), B (5; 9), C (6; 2). Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

8.2. Докажите, что точка M (0; –1) является центром окружности, описанной около треугольника ABC, если A (6; –9), B (–6; 7), C (8; 5).

8.3. Докажите, что углы B и C треугольника ABC равны, если A (5; –7), B (–3; 8), C (–10; –15).

8.4. Точка C — середина отрезка AB. Найдите координаты точки B, если:

1) A (3; –4), C (2; 1); 2) A (–1; 1), C (0,5; –1).

8.5. Точка K — середина отрезка AD. Заполните таблицу.

Точка	Координаты точки		
A	(–3; 1)	(–8; 2)	
D	(–1; –3)		(–9; 2)
K		(–4; 6)	(1; 2)

8.6. Известно, что точка C принадлежит отрезку AB, причём $AC : CB =$ $= 2 : 3$. Найдите координаты точки C, если $A\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$, B (2; 6).

8.7. Точка M делит отрезок AB в отношении 2 : 1. Найдите координаты точки M, если A (–3; 6), B (3; –9).

8.8. Найдите медиану BM треугольника, вершинами которого являются точки A (3; –2), B (2; 3) и C (7; 4).

8.9. Даны точки A (–2; 4) и B (2; –8). Найдите расстояние от начала координат до середины отрезка AB.

8.10. Докажите, что треугольник с вершинами в точках $A\ (2;\ 7)$, $B\ (-1;\ 4)$, $C\ (1;\ 2)$ является прямоугольным.

8.11. Точки $A\ (-1;\ 2)$ и $B\ (7;\ 4)$ являются вершинами прямоугольного треугольника. Может ли третья вершина треугольника иметь координаты: 1) $(7;\ 2)$; 2) $(2;\ -3)$?

8.12. Лежат ли на одной прямой точки:
1) $A\ (-2;\ -7)$, $B\ (-1;\ -4)$ и $C\ (5;\ 14)$;
2) $D\ (-1;\ 3)$, $E\ (2;\ 13)$ и $F\ (5;\ 21)$?
В случае утвердительного ответа укажите, какая из точек лежит между двумя другими.

8.13. Докажите, что точки $M\ (-4;\ 5)$, $N\ (-10;\ 7)$ и $K\ (8;\ 1)$ лежат на одной прямой, и укажите, какая из них лежит между двумя другими.

8.14. При каком значении x расстояние между точками $C\ (3;\ 2)$ и $D\ (x;\ -1)$ равно 5?

◆ ◆

8.15. На оси абсцисс найдите точку, равноудалённую от точек $A\ (-1;\ -1)$ и $B\ (2;\ 4)$.

8.16. Найдите координаты точки, принадлежащей оси ординат и равноудалённой от точек $D\ (-2;\ -3)$ и $E\ (4;\ 1)$.

8.17. Точка $C\ (3;\ -0{,}5)$ делит отрезок AB в отношении $1 : 3$, считая от точки $A\ (5;\ -3)$. Найдите координаты точки B.

8.18. Четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм, $A\ (-5;\ 1)$, $B\ (-4;\ 4)$, $C\ (-1;\ 5)$. Найдите координаты вершины D.

8.19. Четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм, $A\ (-2;\ -2)$, $C\ (4;\ 1)$, $D\ (-1;\ 1)$. Найдите координаты вершины B.

8.20. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A\ (-2;\ 8)$, $B\ (3;\ -3)$, $C\ (6;\ 2)$ и $D\ (1;\ 13)$ является параллелограммом.

8.21. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A\ (-3;\ -2)$, $B\ (-1;\ 2)$, $C\ (1;\ -2)$ и $D\ (-1;\ -6)$ является ромбом.

8.22. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A\ (-2;\ 6)$, $B\ (-8;\ -2)$, $C\ (0;\ -8)$ и $D\ (6;\ 0)$ является квадратом.

8.23. Точки $D\ (1;\ 4)$ и $E\ (2;\ 2)$ — середины сторон AC и BC треугольника ABC соответственно. Найдите координаты вершин A и C, если $B\ (-3;\ -1)$.

8.24. Найдите длину отрезка, концы которого принадлежат осям координат, а серединой является точка $M\ (-3;\ 8)$.

8.25. Точки $A\ (x_1;\ y_1)$, $B\ (x_2;\ y_2)$, $C\ (x_3;\ y_3)$, $D\ (x_4;\ y_4)$ — вершины четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что этот четырёхугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда $x_1 + x_3 = x_2 + x_4$ и $y_1 + y_3 = y_2 + y_4$.

8.26. Найдите координаты вершины C равностороннего треугольника ABC, если $A (2; -3)$ и $B (-2; 3)$.

8.27. Найдите координаты вершины E равностороннего треугольника DEF, если $D (-6; 0)$ и $F (2; 0)$.

8.28. В треугольнике ABC $AB = BC$, $A (5; 9)$, $C (1; -3)$, модули координат точки B равны. Найдите координаты точки B.

◆ ◆ ◆

8.29. Найдите координаты всех точек C оси абсцисс таких, что треугольник ABC равнобедренный, если $A (1; 1)$, $B (2; 3)$.

8.30. Найдите координаты всех точек B оси ординат таких, что треугольник ABC прямоугольный, если $A (1; 3)$, $C (3; 7)$.

8.31. Найдите координаты точки, равноудалённой от осей координат и от точки $A (3; 6)$.

8.32. Найдите координаты точки, равноудалённой от осей координат и от точки $B (-4; 2)$.

8.33. Точки $A (x_1; y_1)$, $B (x_2; y_2)$, $C (x_3; y_3)$ являются вершинами треугольника ABC. Докажите, что точка пересечения медиан этого треугольника имеет координаты $\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$.

8.34. Точки $A (1; 2)$, $B (2; 5)$, $C (7; 0)$ являются вершинами треугольника ABC. Найдите биссектрису AA_1 этого треугольника.

8.35. Биссектриса внешнего угла треугольника ABC при вершине B пересекает прямую AC в точке D. Найдите отрезок BD, если $A (1; -5)$, $B (0; -2)$, $C (3; 7)$.

8.36. Опишите, как, зная координаты вершин треугольника, найти координаты центра его вписанной окружности.

8.37. Точки $A (1; 1)$, $B (3; 4)$, $C (6; 4)$, $D (7; 1)$ — вершины трапеции $ABCD$. Найдите координаты точки пересечения диагоналей трапеции.

8.38. На бумаге в клетку изображён 10-угольник так, что все его вершины расположены в узлах сетки. Докажите, что в этом многоугольнике существует по крайней мере две диагонали, каждая из которых содержит узел сетки, отличный от вершины.

8.39. На бумаге в клетку выделен квадрат сетки, в котором отметили три вершины (рис. 8.7). Разрешается отмечать новые точки по такому правилу: если

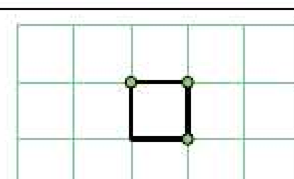


Рис. 8.7

A и B — уже отмеченные точки, то новую точку X можно отметить так, чтобы точка B была серединой отрезка AX или точка A была серединой отрезка BX (рис. 8.8). Можно ли с помощью этого правила отметить и четвёртую вершину выделенного квадрата?

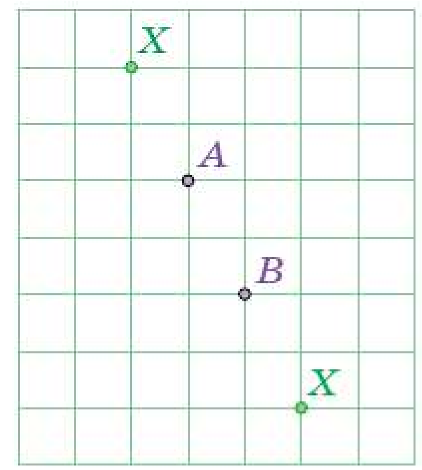


Рис. 8.8

§ 9 Уравнение фигуры

Координаты $(x; y)$ каждой точки параболы, изображённой на рисунке 9.1, являются решением уравнения $y = x^2$. И наоборот, каждое решение уравнения с двумя переменными $y = x^2$ является координатами точки, лежащей на параболе. В этом случае говорят, что уравнение параболы, изображённой на рисунке 9.1, имеет вид $y = x^2$.

Вообще, **уравнением фигуры F, заданной на плоскости xy, называют уравнение с двумя переменными x и y, обладающее такими свойствами:**

1) если точка принадлежит фигуре F, то её координаты являются решением данного уравнения;

2) любое решение $(x; y)$ данного уравнения является координатами точки, принадлежащей фигуре F.

Например, уравнение прямой, изображённой на рисунке 9.2, имеет вид $y = 2x - 1$, а уравнение гиперболы, изображённой на рисун-

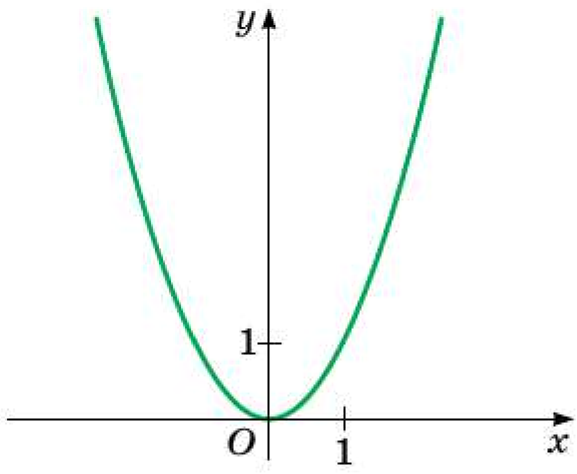


Рис. 9.1

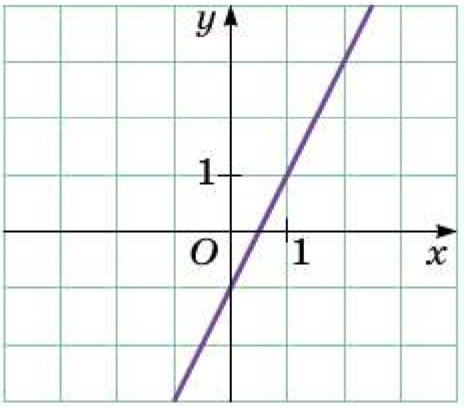


Рис. 9.2

ке 9.3, имеет вид $y = \dfrac{1}{x}$. Принято говорить, что, например, уравнения $y = 2x - 1$ и $y = \dfrac{1}{x}$ **задают** прямую и гиперболу соответственно.

Если данное уравнение является уравнением фигуры F, то эту фигуру можно рассматривать как геометрическое место точек (ГМТ), координаты которых удовлетворяют данному уравнению.

Пользуясь этими соображениями, выведем уравнение окружности радиуса R с центром в точке $A\ (a;\ b)$.

Пусть $M\ (x;\ y)$ — произвольная точка данной окружности (рис. 9.4). Тогда $AM = R$. Используя формулу расстояния между точками, получим: $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$.

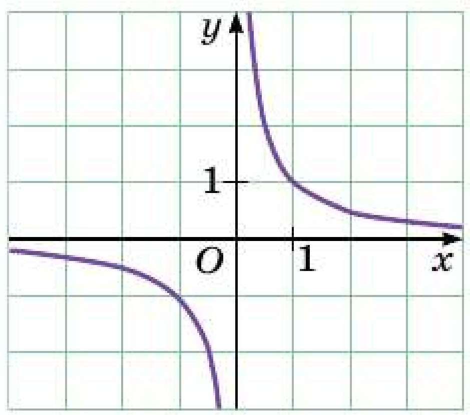


Рис. 9.3

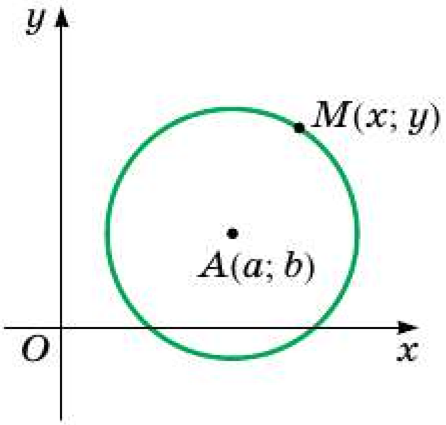


Рис. 9.4

Отсюда $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$. (1)

Мы показали, что координаты $(x;\ y)$ произвольной точки M данной окружности являются решением уравнения (1). Теперь покажем, что любое решение уравнения $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ является координатами точки, принадлежащей данной окружности.

Пусть пара $(x_1;\ y_1)$ — произвольное решение уравнения (1). Тогда: $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = R^2$. Отсюда $\sqrt{(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2} = R$.

Это равенство показывает, что точка $N\ (x_1;\ y_1)$ удалена от центра окружности $A\ (a;\ b)$ на расстояние, равное радиусу окружности, а следовательно, точка $N\ (x_1;\ y_1)$ принадлежит данной окружности.

Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 9.1

Уравнение окружности радиуса R с центром в точке $A\ (a;\ b)$ имеет вид:

$$\boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2}$$

Имеет место и такое утверждение:

любое уравнение вида $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$***, где*** a***,*** b ***и*** R ***— некоторые числа, причём*** $R>0$***, является уравнением окружности радиуса*** R ***с центром в точке с координатами*** $(a;\ b)$***.***

Если центром окружности является начало координат, то $a=b=0$. Уравнение такой окружности имеет вид:

$$x^2+y^2=R^2.$$

Определение

Эллипсом называют геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2 является постоянной величиной, большей, чем F_1F_2. Точки F_1 и F_2 называют фокусами эллипса.

На рисунке 9.5 изображён эллипс, фокусы F_1 и F_2 которого имеют соответственно координаты $(-c;\ 0)$ и $(c;\ 0)$. Отрезки $OA=a$ и $OB=b$ называют соответственно **большой и малой полуосями** эллипса.

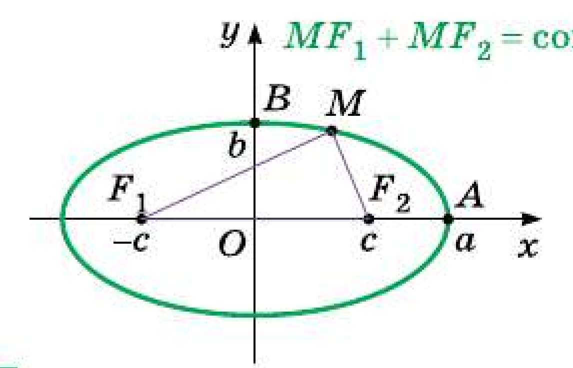


Рис. 9.5

Уравнение эллипса, изображённого на рисунке 9.5, имеет вид:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,}\quad \text{где } a>b \text{ и } a^2-b^2=c^2. \qquad (2)$$

В этом вы сможете убедиться, если примете участие в работе над проектом «Кривые второго порядка».

Если $a=b$, то уравнение (2) можно записать так: $x^2+y^2=a^2$. Получили уравнение окружности. В этом случае $c=0$ и точки F_1 и F_2 совпадают. Поэтому окружность можно рассматривать как частный случай эллипса, у которого фокусы совпадают.

Определение

Гиперболой называют геометрическое место точек, модуль разности расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2 является постоянной величиной, меньшей, чем F_1F_2. Точки F_1 и F_2 называют фокусами гиперболы.

На рисунке 9.6 изображена гипербола, фокусы F_1 и F_2 которой имеют соответственно координаты $(-c; 0)$ и $(c; 0)$. Эта фигура состоит из двух **ветвей**, которые принадлежат вертикальным углам AOB и COD, образованных прямыми AD и BC. Эти прямые обладают таким свойством: чем дальше точка M, принадлежащая гиперболе, расположена от начала координат, тем меньше расстояние от неё до одной из указанных прямых, причём это расстояние может стать меньше любого наперёд заданного положительного числа. Прямые AD и BC называют **асимптотами** гиперболы.

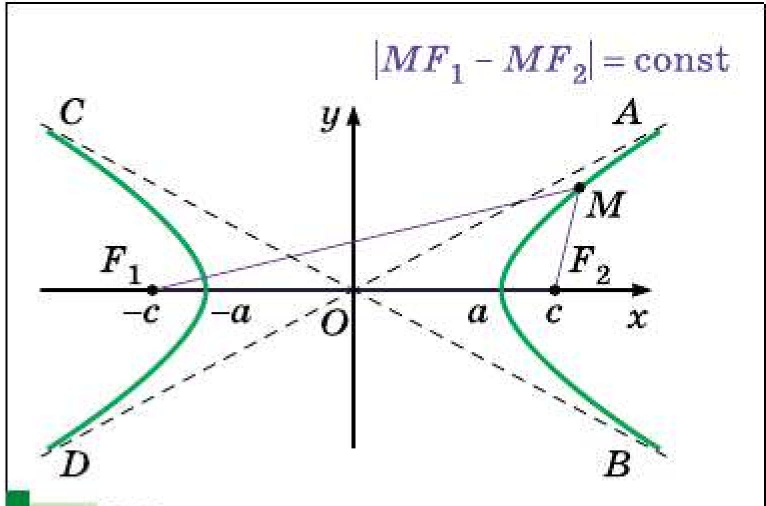


Рис. 9.6

Ветви гиперболы пересекают ось абсцисс в точках, равноудалённых от начала координат. Пусть эти точки имеют координаты $(-a; 0)$ и $(a; 0)$.

Уравнение гиперболы, изображённой на рисунке 9.6, имеет вид:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,} \quad \text{где } b^2 = c^2 - a^2.$$

В этом вы сможете убедиться, если примете участие в работе над проектом «Кривые второго порядка».

Понятно, что, изменив положение фигуры на координатной плоскости, мы тем самым изменим её уравнение.

Рассмотрим гиперболу с перпендикулярными асимптотами. Расположим её так, чтобы оси координат совпадали с асимптотами (рис. 9.7). Можно показать, что в этом случае уравнение гиперболы

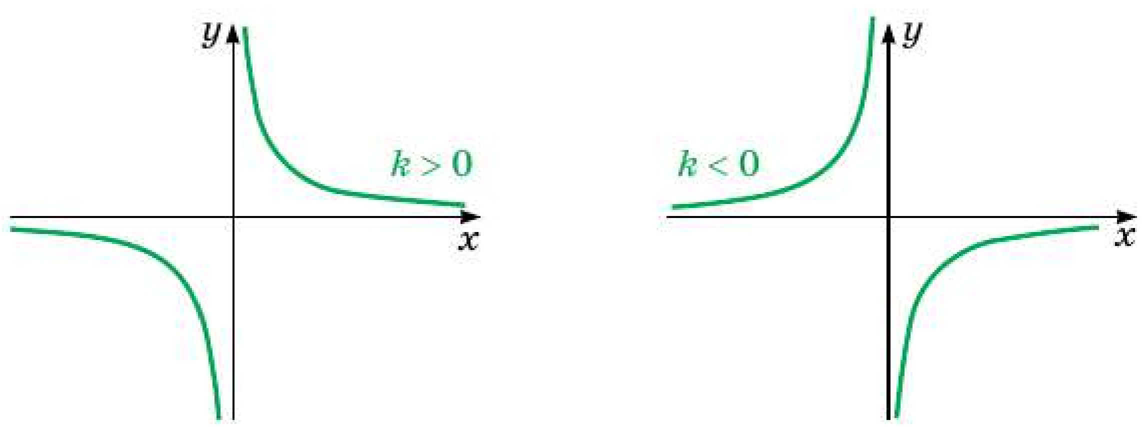


Рис. 9.7

имеет вид $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$. Это уравнение хорошо вам знакомо из курса алгебры.

Задача 1. Составьте уравнение окружности, диаметром которой является отрезок AB, если $A\ (-5;\ 9)$, $B\ (7;\ -3)$.

Решение. Поскольку центр окружности является серединой диаметра, то можем найти координаты $(a;\ b)$ центра C окружности:

$$a = \frac{-5+7}{2} = 1,\quad b = \frac{9-3}{2} = 3.$$

Следовательно, $C\ (1;\ 3)$.

Радиус окружности $R = AC$. Тогда $R^2 = (1+5)^2 + (3-9)^2 = 72$.

Следовательно, искомое уравнение имеет вид:

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 72.$$

Ответ: $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 72$. ■

Задача 2. Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 + 6x - 14y + 50 = 0$ задаёт окружность. Найдите координаты центра и радиус этой окружности.

Решение. Представим данное уравнение в виде $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$:

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 14y + 49 + 50 - 58 = 0;$$

$$(x+3)^2 + (y-7)^2 = 8.$$

Следовательно, данное уравнение является уравнением окружности с центром в точке $(-3;\ 7)$ и радиусом $2\sqrt{2}$. ■

Ответ: $(-3;\ 7)$; $2\sqrt{2}$. ■

Задача 3. Докажите, что существует окружность, которая проходит через начало координат и на которой нет других точек, обе координаты которых являются рациональными числами.

Решение. Покажем, что, например, окружность, заданная уравнением $(x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2 = 4$, является искомой.

Имеем: $x^2 - 2x\sqrt{2} + 2 + y^2 - 2y\sqrt{2} + 2 = 4$;

$$x^2 + y^2 = 2\sqrt{2}(x+y). \qquad (3)$$

Пара $(0;\ 0)$ является решением этого уравнения.

Если $x \in \boldsymbol{Q}$ и $y \in \boldsymbol{Q}$, то числа $x^2 + y^2$ и $x + y$ — также рациональные. Вместе с тем, учитывая, что число $\sqrt{2}$ — иррациональное, получаем, что равенство (3) возможно только при $x = y = 0$. Следовательно, уравнение (3) имеет только одно решение $(x;\ y)$ такое, что $x \in \boldsymbol{Q}$ и $y \in \boldsymbol{Q}$. ■

1. Что называют уравнением фигуры, заданной на плоскости xy?
2. Какой вид имеет уравнение окружности с центром в точке $(a; b)$ и радиусом R?
3. Какой вид имеет уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом R?

Упражнения

9.1. Определите по уравнению окружности координаты её центра и радиус:
1) $(x - 8)^2 + (y - 3)^2 = 25$;
2) $(x + 5)^2 + y^2 = 9$;
3) $x^2 + y^2 = 7$;
4) $x^2 + (y + 1)^2 = 3$.

9.2. Составьте уравнение окружности, если известны координаты её центра A и радиус R:
1) A (3; 4), $R = 4$;
2) A (–2; 0), $R = 1$;
3) A (7; – 6), $R = \sqrt{2}$;
4) A (0; 5), $R = \sqrt{7}$.

9.3. Составьте уравнение окружности, если известны координаты её центра B и радиус R:
1) B (–1; 9), $R = 9$;
2) B (–8; –8), $R = \sqrt{3}$.

9.4. Определите координаты центра и радиус окружности, изображённой на рисунке 9.8, и запишите уравнение этой окружности.

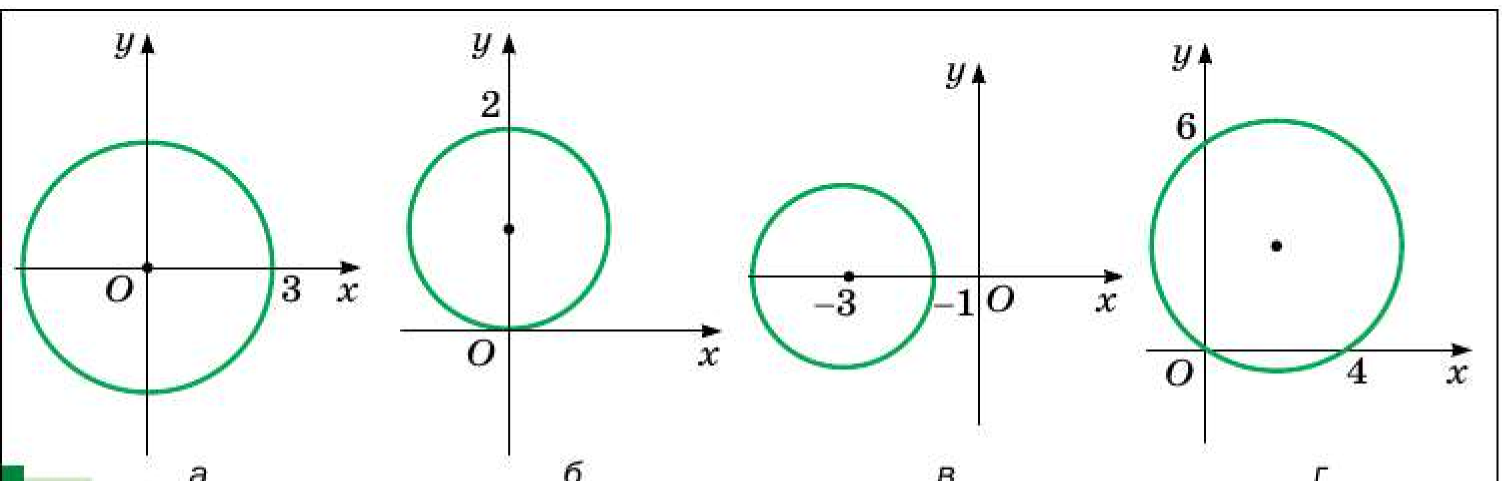


Рис. 9.8

9.5. Радиус окружности с центром в точке A равен 4 (рис. 9.9). Составьте уравнение этой окружности.

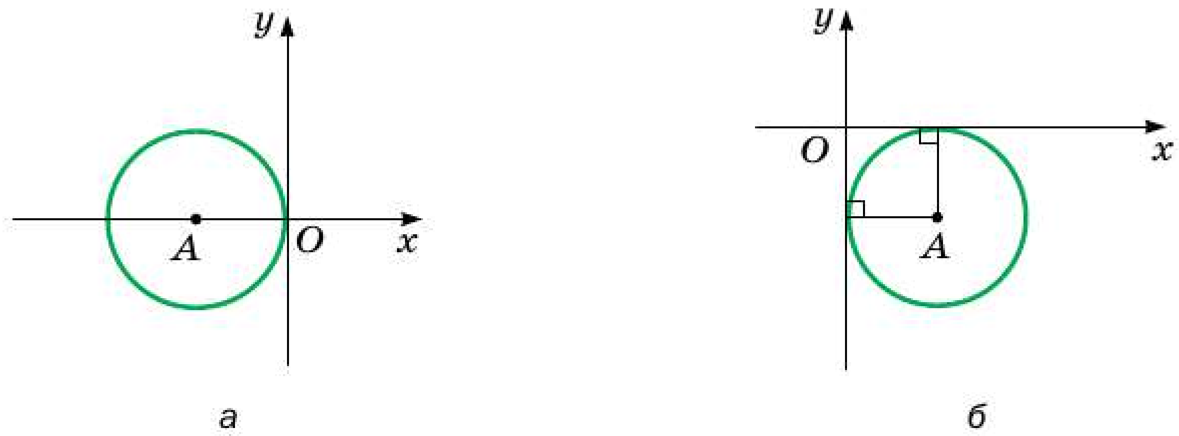


Рис. 9.9

9.6. Составьте уравнение окружности с центром в точке $M\ (-3;\ 1)$, проходящей через точку $K\ (-1;\ 5)$.

9.7. Составьте уравнение окружности, диаметром которой является отрезок AB, если $A\ (2;\ -7)$, $B\ (-2;\ 3)$.

9.8. Докажите, что отрезок AB является диаметром окружности $(x-5)^2+(y+4)^2=17$, если $A\ (1;\ -5)$, $B\ (9;\ -3)$.

9.9. Докажите, что отрезок CD является хордой окружности $x^2+(y-9)^2=169$, если $C\ (5;\ -3)$, $D\ (-12;\ 4)$.

9.10. Составьте уравнение окружности, центром которой является точка $P\ (-6;\ 7)$ и которая касается оси ординат.

9.11. Составьте уравнение окружности, центр которой находится на прямой $y=-5$ и которая касается оси абсцисс в точке $S\ (2;\ 0)$.

9.12. Сколько существует окружностей, проходящих через точку $(3;\ 5)$, радиусы которых равны $3\sqrt{5}$ и центры которых принадлежат оси ординат? Запишите уравнение каждой такой окружности.

9.13. Составьте уравнение окружности, проходящей через точки $A\ (-4;\ 1)$ и $B\ (8;\ 5)$, центр которой принадлежит оси абсцисс.

9.14. Докажите, что окружность $(x+6)^2+(y-3)^2=36$:
1) касается оси ординат;
2) пересекает ось абсцисс;
3) не имеет общих точек с прямой $y=10$.

9.15. Установите, является ли данное уравнение уравнением окружности. В случае утвердительного ответа укажите координаты центра и радиус R этой окружности:
1) $x^2+2x+y^2-10y-23=0$;
2) $x^2-12x+y^2+4y+40=0$;
3) $x^2+y^2+6y+8x+34=0$;
4) $x^2+y^2-4x-14y+51=0$.

9.16. Докажите, что данное уравнение является уравнением окружности, и укажите координаты центра и радиус R этой окружности:
1) $x^2+y^2+16y+60=0$;
2) $x^2+y^2-8x+4y+15=0$.

9.17. Найдите большую и малую полуоси и координаты фокусов эллипса $\frac{x^2}{17}+\frac{y^2}{8}=1$.

9.18. Найдите координаты фокусов гиперболы $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{11}=1$.

9.19. Какую фигуру задаёт уравнение:
1) $2x-3y=5$; 2) $x^2+2y^2=2$; 3) $x^2-y^2=1$?

9.20. Какую фигуру задаёт уравнение:
1) $y=2x^2-x+2$; 2) $x^2+y^2=5$; 3) $x^2-y^2=2$?

9.21. Найдите расстояние между центрами окружностей $x^2+y^2-2x+4y=9$ и $x^2+y^2-8x-4y=21$.

9.22. Найдите расстояние между центрами окружностей $x^2+y^2-20x-4y=-68$ и $x^2+y^2+4x+6y=-9$.

◆ ◆

9.23. Докажите, что треугольник с вершинами в точках $A(-1; -2)$, $B(-1; 2)$, $C(5; 2)$ является прямоугольным, и составьте уравнение окружности, описанной около этого треугольника.

9.24. Составьте уравнение окружности, проходящей через точки $C(-1; 5)$ и $D(6; 4)$, радиус которой равен 5.

9.25. Составьте уравнение окружности, проходящей через точки $M(-2; 1)$ и $K(-4; -1)$, радиус которой равен $\sqrt{10}$.

9.26. Составьте уравнение окружности, которая касается координатных осей и прямой $y=-4$.

9.27. Составьте уравнение окружности, которая касается координатных осей и прямой $x=2$.

9.28. Составьте уравнение окружности, проходящей через точки:
1) $A(-3; 7)$, $B(-8; 2)$, $C(-6; -2)$;
2) $M(-1; 10)$, $N(12; -3)$, $K(4; 9)$.

9.29. Исследуйте взаимное расположение двух окружностей:
1) $x^2+y^2-2x+4y+4=0$ и $x^2-8x+y^2+12=0$;
2) $x^2+y^2-4x-4y+4=0$ и $x^2+y^2-10x-12y+52=0$;
3) $x^2+y^2-2x+4y+4=0$ и $x^2+y^2+4x-4y-28=0$;
4) $x^2+y^2=81$ и $x^2+y^2+2x-2y-2=0$;
5) $x^2+y^2+6x-4y+3=0$ и $x^2+y^2+6x-4y-7=0$.

◆ ◆ ◆

9.30. Дана окружность $(x-1)^2+(y-1)^2=4$. Найдите уравнение окружности с центром $O_1(4; -3)$, которая касается данной окружности.

9.31. Дана окружность $(x+1)^2+(y-2)^2=100$. Найдите уравнение окружности с центром $O_1(3; -1)$, которая касается данной окружности.

9.32. Найдите уравнение геометрического места центров окружностей радиуса 1, которые касаются окружности $x^2+y^2=9$.

9.33. Составьте уравнение окружности, которая проходит через точки $A\ (1;\ 0)$ и $O\ (0;\ 0)$ и касается окружности $x^2 + y^2 = 9$.

9.34. На окружности $x^2 + y^2 = 25$ отметили точку $A\ (3;\ 4)$. Найдите координаты вершин квадрата $ABCD$, вписанного в эту окружность.

9.35. На окружности $x^2 + y^2 = 12$ отметили точку $A\ (0;\ 2\sqrt{3})$. Найдите координаты вершин равностороннего треугольника ABC, вписанного в эту окружность.

9.36. Найдите геометрическое место точек X таких, что $XA^2 + XB^2 = a$, где $A\ (1;\ -1)$, $B\ (3;\ -5)$, a — некоторое число.

9.37. Параболы $y = x^2 - 11$ и $x = y^2 - 12$ пересекаются в четырёх точках. Докажите, что эти точки лежат на одной окружности.

§ 10 Общее уравнение прямой

В предыдущем параграфе, рассматривая окружность как ГМТ, равноудалённых от данной точки, мы вывели её уравнение. Для того чтобы вывести уравнение прямой, рассмотрим её как ГМТ, равноудалённых от двух точек.

Пусть a — данная прямая. Выберем две точки $A\ (x_1;\ y_1)$ и $B\ (x_2;\ y_2)$ так, чтобы прямая a была серединным перпендикуляром отрезка AB (рис. 10.1).

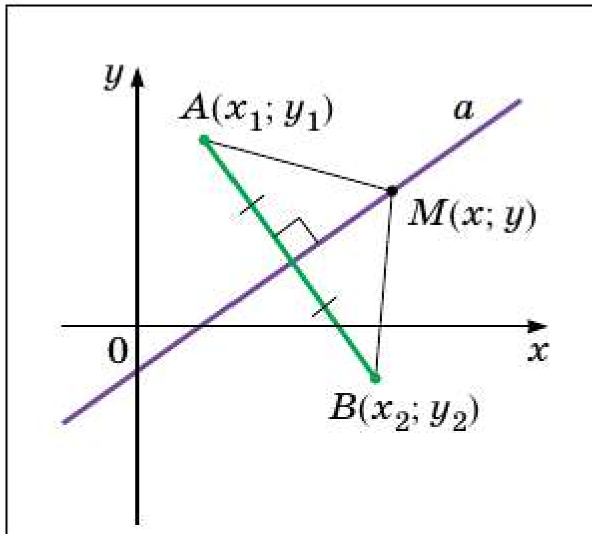


Рис. 10.1

Точка $M\ (x;\ y)$ координатной плоскости принадлежит прямой a тогда и только тогда, когда $MA = MB$, т. е.

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}. \qquad (1)$$

Следовательно, уравнение (1) является уравнением данной прямой a.

Однако из курса алгебры 7 класса вы знаете, что уравнение прямой выглядит гораздо проще, а именно: $ax + by = c$, где a, b, c — некоторые числа, причём a и b не равны нулю одновременно. Покажем, что уравнение (1) можно преобразовать к такому виду.

Имеем: $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$. Возведя все двучлены в квадрат и приведя подобные слагаемые, получим:

$$2(x_2 - x_1)\,x + 2(y_2 - y_1)\,y = x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2.$$

Обозначив $2(x_2 - x_1) = a$, $2(y_2 - y_1) = b$, $x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2 = c$, получим уравнение $ax + by = c$.

Так как точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ различны, то хотя бы одна из разностей $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$ не равна нулю. Следовательно, числа a и b не равны нулю одновременно.

Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 10.1

Уравнение прямой имеет вид

$$\boxed{ax + by = c,}$$

где a, b и c — некоторые числа, причём a и b не равны нулю одновременно.

Верно и такое утверждение: ***любое уравнение вида $ax + by = c$, где a, b и c — некоторые числа, причём a и b не равны нулю одновременно, является уравнением прямой.***

Замечание. Если $a = b = c = 0$, то графиком уравнения $ax + by = c$ является вся плоскость xy. Если $a = b = 0$ и $c \neq 0$, то уравнение не имеет решений.

Из курса алгебры 7 класса вы знаете, что уравнение вида $ax + by = c$ называют линейным уравнением с двумя переменными. Уравнение прямой является частным видом линейного уравнения. Схема, изображённая на рисунке 10.2, иллюстрирует вышесказанное.

Рис. 10.2

Также на уроках алгебры в 7 классе мы приняли без доказательства тот факт, что графиком линейной функции $y = kx + p$ является прямая. Сейчас мы это можем доказать.

Действительно, представим уравнение $y = kx + p$ в виде: $-kx + y = p$. Мы получили уравнение вида $ax + by = c$ для случая, когда $a = -k$, $b = 1$, $c = p$. Поскольку в этом уравнении $b \neq 0$, то мы получили уравнение прямой.

А любую ли прямую на плоскости можно задать уравнением вида $y = kx + p$? Ответ на этот вопрос отрицательный.

Дело в том, что прямая, перпендикулярная оси абсцисс, не может являться графиком функции, а следовательно, не может иметь уравнение вида $y = kx + p$.

Вместе с тем, если в уравнении прямой $ax + by = c$ положить $b = 0$, то его можно представить в виде: $x = \frac{c}{a}$. Мы получили частный вид уравнения прямой, все точки которой имеют одинаковые абсциссы. Следовательно, эта прямая перпендикулярна оси абсцисс. Её называют вертикальной.

Если $b \neq 0$, то уравнение $ax + by = c$ задаёт невертикальную прямую, и это уравнение можно представить в виде: $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$. Обозначив $-\frac{a}{b} = k$, $\frac{c}{a} = p$, получим уравнение $y = kx + p$.

Следовательно, любую невертикальную прямую можно задать уравнением вида $y = kx + p$.

Если $b = 0$ и $a \neq 0$, то уравнение прямой $ax + by = c$ задаёт вертикальную прямую; если $b \neq 0$, то это уравнение задаёт невертикальную прямую.

Поэтому уравнение $ax + by = c$, где $a^2 + b^2 \neq 0$, называют **общим уравнением прямой**.

Обобщим материал, рассмотренный в этом параграфе.

Уравнение	Значение a, b, c	График
$ax + by = c$	$b \neq 0$, a и c — любые	Невертикальная прямая
	$b = 0$, $a \neq 0$, c — любое	Вертикальная прямая
	$a = b = c = 0$	Вся координатная плоскость
	$a = b = 0$, $c \neq 0$	Пустое множество

Задача 1. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки: 1) $A\ (-3; 5)$ и $B\ (-3; -6)$; 2) $C\ (6; 1)$ и $D\ (-18; -7)$.

Решение. 1) Так как данные точки имеют равные абсциссы, то прямая AB является вертикальной. Её уравнение имеет вид $x = -3$.

2) Так как данные точки имеют разные абсциссы, то прямая CD не является вертикальной. Тогда можно воспользоваться уравнением прямой в виде $y = kx + p$.

Подставив координаты точек C и D в уравнение $y = kx + p$, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 6k + p = 1, \\ -18k + p = -7. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, находим, что $k = \frac{1}{3}$, $p = -1$. Искомое уравнение имеет вид: $y = \frac{1}{3}x - 1$.

Ответ: 1) $x = -3$; 2) $y = \frac{1}{3}x - 1$. ■

Задача 2. Найдите периметр и площадь треугольника, ограниченного прямой $5x + 12y = -60$ и осями координат.

Решение. Найдём точки пересечения данной прямой с осями координат.

При $y = 0$ имеем: $5x = -60$; $x = -12$.

При $x = 0$ имеем: $12y = -60$; $y = -5$.

Следовательно, данная прямая и оси координат ограничивают прямоугольный треугольник AOB (рис. 10.3) с вершинами A $(-12; 0)$, B $(0; -5)$, O $(0; 0)$, в котором $OA = 12$, $OB = 5$.

$AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = 13$.

Тогда $P = OA + OB + AB$, $P = 30$, $S = \frac{1}{2} OA \cdot OB$, $S = 30$.

Ответ: $P = 30$, $S = 30$. ■

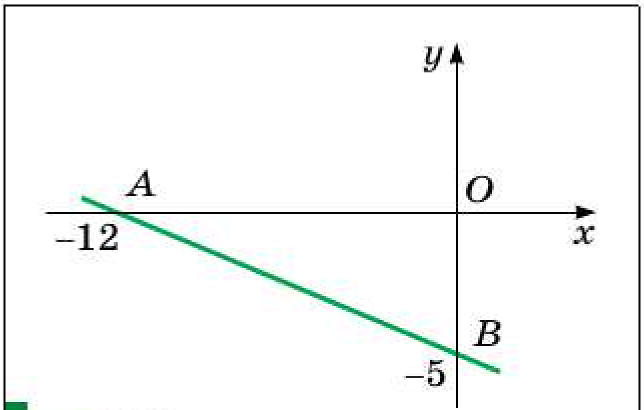


Рис. **10.3**

1. Какой вид имеет уравнение прямой на плоскости xy?
2. В каком виде удобно записывать уравнение невертикальной прямой?
3. Любое ли линейное уравнение с двумя переменными является уравнением прямой?
4. Любую ли прямую на плоскости можно задать уравнением вида $y = kx + p$?
5. При каком условии уравнение прямой $ax + by = c$ является уравнением вертикальной прямой? Невертикальной прямой?

Упражнения

10.1. Найдите координаты точек пересечения прямой $4x - 5y = 20$ с осями координат. Принадлежит ли этой прямой точка: 1) A $(10; 4)$; 2) B $(6; 1)$; 3) C $(-1{,}5; 5{,}2)$; 4) D $(-1; 5)$?

10.2. Найдите координаты точек пересечения прямой $3x + 4y = 12$ с осями координат. Какая из точек M $(-2; 4)$ и K $(8; -3)$ принадлежит этой прямой?

10.3. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A\ (6;\ -3)$ и перпендикулярной оси x. Какие координаты имеет точка пересечения этой прямой с осью x?

10.4. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $B\ (5;\ -8)$ и перпендикулярной оси y. Какие координаты имеет точка пересечения этой прямой с осью y?

10.5. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $C\ (-4;\ 9)$ параллельно: 1) оси абсцисс; 2) оси ординат.

10.6. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки:
1) $A\ (1;\ -3)$ и $B\ (-2;\ -9)$;
2) $C\ (3;\ 5)$ и $D\ (3;\ -10)$;
3) $E\ (-4;\ -1)$ и $F\ (9;\ -1)$;
4) $M\ (3;\ -3)$ и $K\ (-6;\ 12)$.

10.7. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки:
1) $A\ (2;\ -5)$ и $B\ (-3;\ 10)$;
2) $C\ (6;\ -1)$ и $D\ (24;\ 2)$.

10.8. Точки $A\ (-6;\ -1)$, $B\ (1;\ 2)$ и $C\ (-5;\ -8)$ — вершины треугольника ABC. Составьте уравнение прямой, содержащей медиану AK треугольника.

10.9. Точки $A\ (-3;\ -4)$, $B\ (-2;\ 2)$, $C\ (1;\ 3)$ и $D\ (3;\ -2)$ — вершины трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Составьте уравнение прямой, содержащей среднюю линию трапеции.

10.10. Абсциссы середин боковых сторон трапеции равны. Можно ли утверждать, что основания трапеции перпендикулярны оси абсцисс?

10.11. Найдите периметр треугольника, ограниченного осями координат и прямой $4x - 3y = 12$.

10.12. Найдите площадь треугольника, ограниченного осями координат и прямой $7y - 2x = 28$.

10.13. Найдите площадь треугольника, ограниченного прямыми $3x + 2y = 6$ и $y = -\frac{9}{4}x$ и осью ординат.

10.14. Докажите, что окружность $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 9$ и прямая $x + y = 7$ пересекаются, и найдите координаты их точек пересечения.

10.15. Докажите, что прямая $x + y = 5$ является касательной к окружности $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 8$, и найдите координаты точки касания.

10.16. Докажите, что окружность $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 1$ и прямая $3x + y = 3$ не имеют общих точек.

◆◆

10.17. Найдите расстояние от начала координат до прямой $5x - 2y = 10$.

10.18. Найдите расстояние от начала координат до прямой $x + y = -8$.

10.19. Найдите длину хорды окружности $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$, лежащей на прямой $y = 3x$.

10.20. Составьте уравнение геометрического места центров окружностей, проходящих через точки A (1; –7) и B (–3; 5).

10.21. Составьте уравнение геометрического места центров окружностей, проходящих через точки C (2; 3) и D (–5; –2).

10.22. Составьте уравнение окружности, проходящей через точки A (2; 0) и B (4; 0), центр которой принадлежит прямой $2x + 3y = 18$.

10.23. Составьте уравнение геометрического места центров окружностей, радиус которых равен 5 и которые отсекают на оси абсцисс хорду длиной 6.

§ 11 Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Рассмотрим уравнение $y = kx$. Оно задаёт невертикальную прямую, проходящую через начало координат.

Покажем, что прямые $y = kx$ и $y = kx + b$, где $b \neq 0$, параллельны.

Точки O (0; 0) и C (1; k) принадлежат прямой $y = kx$, а точки A (0; b) и B (1; $k + b$) принадлежат прямой $y = kx + b$ (рис. 11.1). Легко убедиться (сделайте это самостоятельно), что середины диагоналей AC и OB четырёхугольника $OABC$ совпадают. Следовательно, четырёхугольник $OABC$ — параллелограмм. Отсюда $AB \parallel OC$.

Теперь мы можем сделать такой вывод:

если $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$, то прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ параллельны **(1).**

Пусть прямая $y = kx$ пересекает единичную полуокружность в точке M (x_0; y_0) (рис. 11.2). Угол AOM называют **углом между данной прямой и положительным направлением оси абсцисс.**

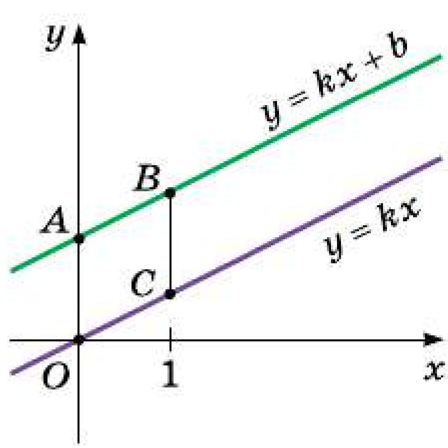


Рис. **11.1**

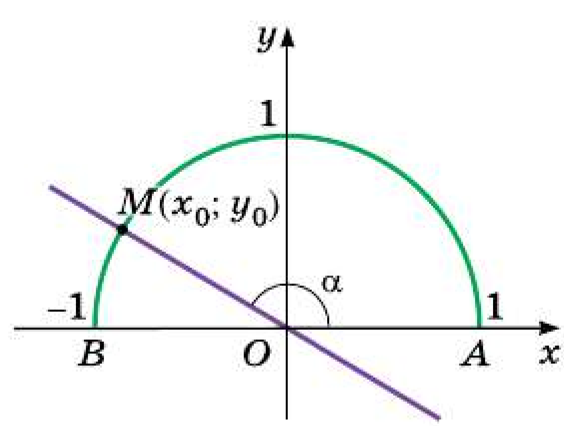


Рис. **11.2**

Если прямая $y = kx$ совпадает с осью абсцисс, то угол между этой прямой и положительным направлением оси абсцисс считают равным 0°.

Если прямая $y = kx$ образует с положительным направлением оси абсцисс угол α, то естественно считать, что и прямая $y = kx + b$, параллельная прямой $y = kx$, также образует угол α с положительным направлением оси абсцисс (рис. 11.3).

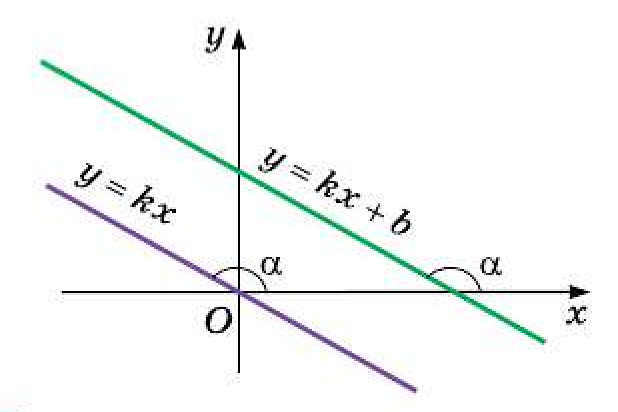


Рис. **11.3**

Рассмотрим прямую MO, уравнение которой имеет вид $y = kx$ (см. рис. 11.2). Если $\angle MOA = \alpha$, то $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y_0}{x_0}$. Так как точка $M\ (x_0;\ y_0)$ принадлежит прямой $y = kx$, то $\frac{y_0}{x_0} = k$. Отсюда $k = \operatorname{tg}\alpha$.

Таким образом, для прямой $y = kx + b$ получаем, что

$$\boxed{k = \operatorname{tg}\alpha,}$$

где α — угол, который образует эта прямая с положительным направлением оси абсцисс. Поэтому коэффициент k называют **угловым коэффициентом** этой прямой, а само уравнение $y = kx + b$ называют **уравнением прямой с угловым коэффициентом.**

Если невертикальные прямые параллельны, то они образуют равные углы с положительным направлением оси абсцисс. Тогда тангенсы этих углов равны, следовательно, равны и их угловые коэффициенты.

Таким образом,

если прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ параллельны, то $k_1 = k_2$ **(2).**

Выводы **(1)** и **(2)** объединим в одну теорему.

Теорема 11.1

Прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ параллельны тогда и только тогда, когда $k_1 = k_2$ *и* $b_1 \neq b_2$.

В ряде случаев возникает необходимость составить уравнение прямой, зная координаты одной её точки и угловой коэффициент прямой.

Пусть прямая $y = kx + b$ проходит через точку $M(x_0; y_0)$. Тогда $y_0 = kx_0 + b$. Отсюда $b = y_0 - kx_0$. Теперь уравнение прямой с угловым коэффициентом можно записать так: $y = kx + y_0 - kx_0$. Отсюда

$$\boxed{y = k(x - x_0) + y_0}$$

Полученное уравнение называют **уравнением прямой с данным угловым коэффициентом, проходящей через данную точку** $M(x_0; y_0)$.

Прямую можно задать любыми двумя её точками. Поэтому, зная координаты двух точек прямой, можно вывести её уравнение. В предыдущем параграфе вы решали эту задачу для некоторых частных случаев (см. задачи 10.6, 10.7). Решим эту задачу в общем виде.

Рассмотрим две точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$.

Если $x_1 = x_2$ и $y_1 \neq y_2$, то прямая AB является вертикальной и её уравнение имеет вид $x = x_1$.

Если $y_1 = y_2$ и $x_1 \neq x_2$, то прямая AB является горизонтальной и её уравнение имеет вид $y = y_1$.

Пусть $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$. Запишем уравнение прямой AB так: $y = k(x - x_1) + y_1$, где k — угловой коэффициент прямой AB. Так как точка $B(x_2; y_2)$ принадлежит прямой AB, то можно записать: $y_2 = k(x_2 - x_1) + y_1$. Отсюда $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Подставив найденное значение k в уравнение $y = k(x - x_1) + y_1$, получим: $y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + y_1$. Отсюда

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}}$$

Полученное уравнение называют **уравнением прямой, проходящей через две данные точки** $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$.

Теорема 11.2

Прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $k_1k_2 = -1$.

Доказательство

• Пусть прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ перпендикулярны. Докажем, что $k_1k_2 = -1$.

Пусть $k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$, $k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$ и прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ пересекаются в точке C, а ось абсцисс эти прямые пересекают соответственно в точках A и B (рис. 11.4).

В треугольнике ABC имеем: $\angle A + \angle B = 90°$. Тогда $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B = 1$. Отсюда $\operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}(180° - \alpha_2) = 1$; $\operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2 = -1$; $k_1k_2 = -1$.

Случай, когда прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ пересекаются в точке, принадлежащей оси абсцисс, рассмотрите самостоятельно.

• Пусть $k_1k_2 = -1$. Докажем, что прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ перпендикулярны.

Имеем: $\operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2 < 0$. Тогда один из углов α_1 или α_2 острый, а другой тупой. Пусть, например, α_1 — острый угол, α_2 — тупой (рис. 11.4). Запишем:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2 = -1;$$
$$\operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha_2) = 1;$$
$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{1}{\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha_2)};$$
$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha_2);$$
$$\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha_1) = \operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha_2).$$

Поскольку углы $90^\circ - \alpha_1$ и $180^\circ - \alpha_2$ острые и их котангенсы равны, то равны и сами углы. Получаем:

$$90^\circ - \alpha_1 = 180^\circ - \alpha_2;$$
$$\alpha_1 + (180^\circ - \alpha_2) = 90^\circ.$$

А это означает, что данные прямые перпендикулярны. ■

Докажем, что расстояние ρ от точки $M(x_0; y_0)$ до прямой, заданной уравнением $ax + by + c = 0$, можно вычислить по формуле

$$\boxed{\rho = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Пусть $b \neq 0$. Тогда угловой коэффициент данной прямой равен $-\frac{a}{b}$.

Из точки M опустим перпендикуляр MP на данную прямую (рис. 11.5). Тогда угловой коэффициент прямой MP равен $\frac{b}{a}$, а её уравнение имеет вид $y = \frac{b}{a}(x - x_0) + y_0$.

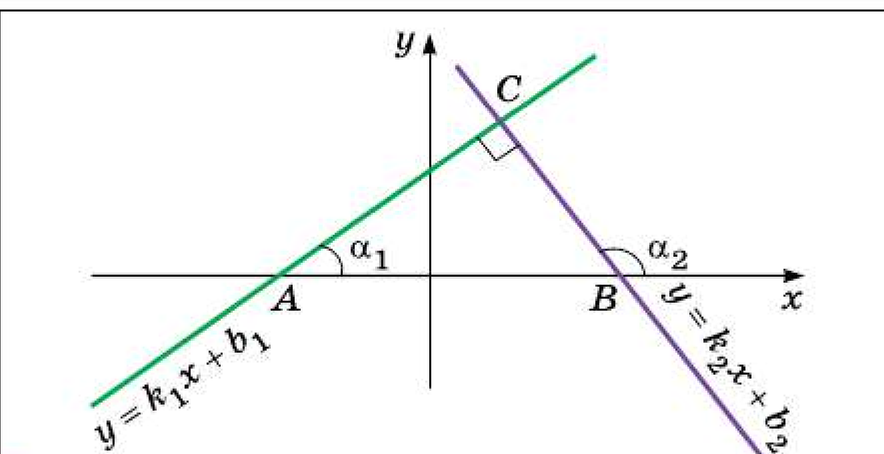


Рис. 11.4

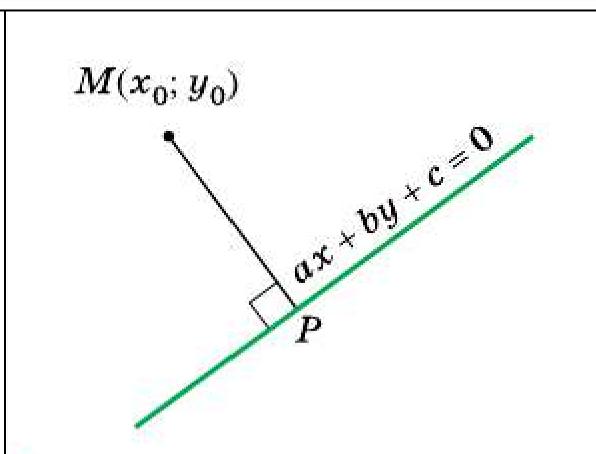


Рис. 11.5

Для того чтобы найти координаты точки P, надо решить систему уравнений

$$\begin{cases} ax + by + c = 0, \\ y = \dfrac{b}{a}(x - x_0) + y_0. \end{cases}$$

Представим эту систему в таком виде:

$$\begin{cases} a(x - x_0) + b(y - y_0) + ax_0 + by_0 + c = 0, \\ y - y_0 = \dfrac{b}{a}(x - x_0). \end{cases}$$

Отсюда легко получить, что

$$\begin{cases} x - x_0 = -\dfrac{a}{a^2 + b^2}(ax_0 + by_0 + c), \\ y - y_0 = -\dfrac{b}{a^2 + b^2}(ax_0 + by_0 + c). \end{cases}$$

Имеем: $MP^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \dfrac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2 + b^2}$. Отсюда

$$MP = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Отметим, что эта формула остаётся справедливой при $b = 0$, т. е. в случае, когда данная прямая является вертикальной.

Задача 1. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку A $(-4; 3)$ и параллельной прямой $y = 0{,}5x - 4$.

Решение. Из теоремы 11.1 следует, что угловой коэффициент искомой прямой равен 0,5. Эта прямая проходит через точку A $(-4; 3)$. Поэтому, воспользовавшись уравнением прямой с данным угловым коэффициентом, получим: $y = 0{,}5(x + 4) + 3$.

Ответ: $y = 0{,}5x + 5$. ■

Задача 2. Точки A $(1; 1)$, B $(4; 2)$, C $(0; 7)$ — вершины треугольника ABC. Найдите уравнение прямой, содержащей высоту треугольника, проведённую к стороне AB.

Решение. Воспользовавшись уравнением прямой, проходящей через две данные точки, найдём уравнение прямой AB:

$$\frac{x - 1}{4 - 1} = \frac{y - 1}{2 - 1}; \quad y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}.$$

Отсюда получаем, что угловой коэффициент искомой прямой равен -3.

Воспользовавшись уравнением прямой с данным угловым коэффициентом, проходящей через данную точку C, получим:

$$y = -3(x - 0) + 7;$$
$$y = -3x + 7.$$

Ответ: $y = -3x + 7$. ■

Задача 3. Найдите уравнение касательной к окружности $x^2 + y^2 = 5$, если известно, что касательная параллельна прямой $y = 2x + 9$.

Решение. Уравнение касательной имеет вид $y = 2x + b$.

I *способ*. Для того чтобы прямая $y = 2x + b$ была касательной к окружности $x^2 + y^2 = 5$, система

$$\begin{cases} y = 2x + b, \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

должна иметь единственное решение.

Имеем: $\begin{cases} y = 2x + b, \\ x^2 + (2x + b)^2 = 5. \end{cases}$

Осталось выяснить, при каких значениях параметра b уравнение $x^2 + (2x + b)^2 = 5$ имеет единственное решение.

Полученное уравнение приведём к виду: $5x^2 + 4bx + b^2 - 5 = 0$. Отсюда $D = 16b^2 - 20b^2 + 100$. Получаем, что $D = 0$ при $b = 5$ или $b = -5$.

Искомые уравнения касательных имеют вид: $y = 2x + 5$ и $y = 2x - 5$.

II *способ*. Прямая $y = 2x + b$ является касательной к окружности $x^2 + y^2 = 5$, если расстояние от центра окружности до этой прямой равно радиусу окружности, т. е. расстояние от точки O (0; 0) до прямой $2x - y + b = 0$ равно $\sqrt{5}$.

Тогда: $\sqrt{5} = \dfrac{|2 \cdot 0 - 0 + b|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}$. Отсюда $b = -5$ или $b = 5$.

Ответ: $y = 2x - 5$, $y = 2x + 5$. ■

?

1. Поясните, что называют углом между прямой и положительным направлением оси абсцисс.
2. Чему считают равным угол между прямой, параллельной оси абсцисс или совпадающей с ней, и положительным направлением оси абсцисс?
3. Что называют угловым коэффициентом прямой?
4. Как связаны угловой коэффициент прямой и угол между прямой и положительным направлением оси абсцисс?
5. Сформулируйте необходимое и достаточное условие параллельности двух невертикальных прямых на координатной плоскости.

Упражнения

11.1. Чему равен угловой коэффициент прямой:
1) $y = 2x - 7$; 3) $y = x + 10$; 5) $y = 4$;
2) $y = -3x$; 4) $y = 5 - x$; 6) $3x - 2y = 4$?

11.2. Какие из прямых $y = 6x - 5$, $y = 0{,}6x + 1$, $y = \frac{3}{5}x + 4$, $y = 2 - 6x$ и $y = 600 + 0{,}6x$ параллельны?

11.3. Какие из прямых $y = 3x + 2$, $y = -3x - 4$, $y = 5 - \frac{1}{3}x$, $y = \frac{2}{5}x$, $y = \frac{1}{3}x + 1$, $y = -2{,}5x + 3$ перпендикулярны?

11.4. Какое число надо подставить вместо звёздочки, чтобы были параллельными прямые:
1) $y = 8x - 14$ и $y = {*}x + 2$; 2) $y = {*}x - 1$ и $y = 3 - 4x$?

11.5. Составьте уравнение прямой, проходящей через начало координат и параллельной прямой:
1) $y = 14x - 11$; 2) $y = -1{,}15x + 2$.

11.6. Составьте уравнение прямой, проходящей через начало координат и параллельной прямой:
1) $y = 0{,}1x - 3$; 2) $y = (2 - \sqrt{3})x + 1$.

11.7. Составьте уравнение прямой, которая проходит через точку $A\ (-3;\ 7)$ и угловой коэффициент которой равен: 1) 4; 2) −3; 3) 0.

11.8. Составьте уравнение прямой, которая проходит через точку $B\ (2;\ -5)$ и угловой коэффициент которой равен −0,5.

11.9. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $M\ (-1;\ 9)$ и параллельной прямой: 1) $y = -7x + 3$; 2) $3x - 4y = -8$.

11.10. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $K\left(-\frac{1}{3};\ 10\right)$ и параллельной прямой: 1) $y = 9x - 16$; 2) $6x + 2y = 7$.

11.11. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $M\ (2;\ -1)$ и перпендикулярной прямой: 1) $y = -0{,}2x - 3$; 2) $3x - 6y = 2$.

11.12. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A\ (-3;\ -1)$ и перпендикулярной прямой: 1) $y = -x + \frac{1}{2}$; 2) $2x + y = -3$.

11.13. Составьте уравнение прямой, которая проходит через точку $A\ (2;\ 6)$ и образует с положительным направлением оси абсцисс угол: 1) $60°$; 2) $120°$.

11.14. Составьте уравнение прямой, которая проходит через точку $B\ (3;\ -2)$ и образует с положительным направлением оси абсцисс угол: 1) $45°$; 2) $135°$.

11.15. Составьте уравнение прямой, изображённой на рисунке 11.6.

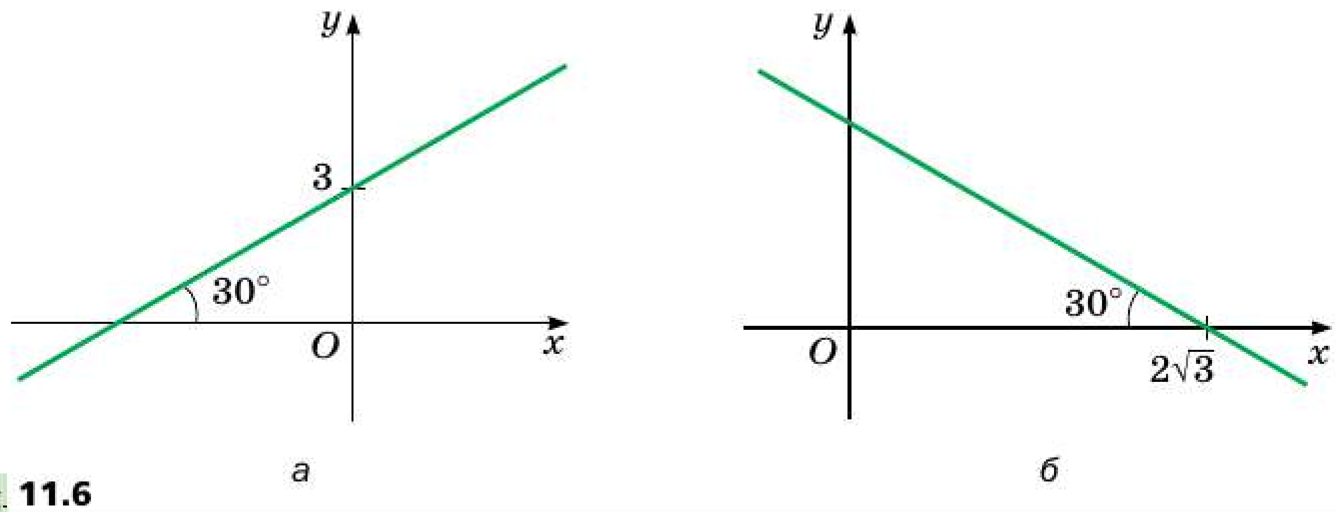


Рис. **11.6**

11.16. Составьте уравнения прямых, изображённых на рисунке 11.7.

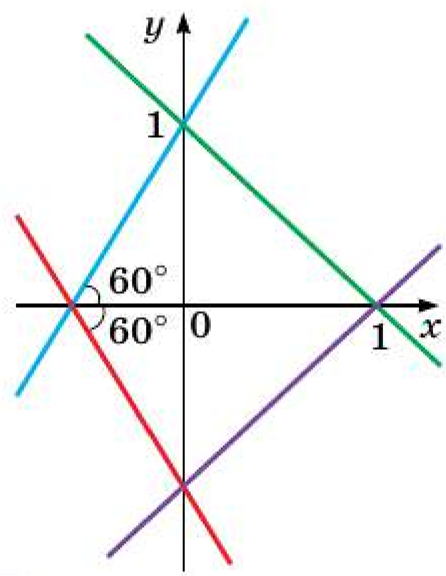


Рис. **11.7**

11.17. Определите, параллельны ли прямые:

1) $2x - 5y = 9$ и $5y - 2x = 1$;
2) $8x + 12y = 15$ и $4x + 6y = 9$;
3) $7x - 2y = 12$ и $7x - 3y = 12$;
4) $3x + 2y = 3$ и $6x + 4y = 6$.

11.18. Докажите, что прямые $7x - 6y = 3$ и $6y - 7x = 6$ параллельны.

11.19. Найдите координаты точек пересечения прямой AB с осями координат, если:

1) A (1; 1), B (2; 3);
2) A (3; –1), B (–2; 2).

11.20. Найдите расстояние от точки M (–1; 2) до прямой:

1) $3x - 4y = 2$; 2) $-5x + 12y = 1$.

11.21. Найдите расстояние от точки пересечения прямых AB и CD до прямой $6x - 8y = -1$, если A (1; –1), B (2; 1), C (3; 1), D (–4; 2).

11.22. Составьте уравнение прямой, проходящей через центры двух данных окружностей:

1) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$ и $x^2 + y^2 - 10x - 6y = 2$;
2) $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 2$ и $x^2 + y^2 - 6x - 4y = 3$.

11.23. Составьте уравнение прямой, которая параллельна прямой $y = 4x + 2$ и пересекает прямую $y = -8x + 9$ в точке, принадлежащей оси ординат.

11.24. Составьте уравнение прямой, которая параллельна прямой $y = 3x + 4$ и пересекает прямую $y = -4x + 16$ в точке, принадлежащей оси абсцисс.

11.25. Составьте уравнение прямой, которая перпендикулярна прямой $y = 2x + 3$ и пересекает прямую $-x + 3y = -6$ в точке, принадлежащей оси абсцисс.

11.26. Составьте уравнение прямой, которая перпендикулярна прямой $2x + y = 1$ и пересекает прямую $x - 4y = -1$ в точке, принадлежащей оси ординат.

11.27. Даны точки $A\ (-1;\ 5)$ и $B\ (8;\ 2)$. Найдите уравнение прямой, которая перпендикулярна прямой AB и пересекает отрезок AB в точке M такой, что $AM : MB = 2 : 1$.

11.28. Запишите уравнение прямых, содержащих высоты треугольника ABC, если $A\ (1;\ 3)$, $B\ (5;\ -7)$, $C\ (-1;\ 9)$.

11.29. Точки $A\ (1;\ 2)$, $B\ (2;\ 5)$, $C\ (7;\ 0)$ — вершины треугольника ABC. Найдите уравнение прямой, которая проходит через вершину B и перпендикулярна биссектрисе треугольника, проведённой из вершины A.

11.30. Дан треугольник ABC, где $A\ (1;\ -2)$, $B\ (3;\ 4)$, $C\ (-1;\ 2)$. Найдите уравнение прямой, которая проходит через вершину B и перпендикулярна медиане треугольника, проведённой из вершины A.

11.31. Найдите площадь треугольника ABC, если $A\ (1;\ -2)$, $B\ (1;\ 1)$, $C\ (-3;\ -5)$.

11.32. Найдите уравнение окружности с центром в точке $M\ (-2;\ 1)$, которая касается прямой $8x - 15y = -2$.

11.33. Найдите ГМТ, равноудалённых от двух данных параллельных прямых $5x - 12y = 1$ и $-5x + 12y = -3$.

11.34. Найдите уравнение касательной к окружности $x^2 + (y - 2)^2 = 25$, если эта касательная проходит через точку $M\ (3;\ -2)$.

◆ ◆ ◆

11.35. Запишите уравнение окружности, проходящей через точки $A\ (5;\ -3)$ и $B\ (-3;\ 5)$, центр которой принадлежит прямой $2x + 3y = 5$.

11.36. Найдите ГМТ, равноудалённых от прямых $3x - 4y = -7$ и $4x - 3y = 8$.

11.37. Найдите расстояние между двумя прямыми:

1) $3x + 4y = 8$ и $3x + 4y = -12$; 2) $4x + 3y = 5$ и $8x + 6y = 3$.

11.38. Запишите уравнения окружностей радиуса 1, которые касаются прямых $3x - 4y = 1$ и $4x - 3y = -1$.

11.39. Найдите уравнения касательных к окружности $x^2 + y^2 - 2y = 9$, проходящих через точку $M\ (7;\ 2)$.

11.40. Найдите уравнения общих касательных к окружностям $x^2 + y^2 = 6x$ и $x^2 + y^2 = 6y$.

11.41. Точка A лежит на прямой $3x - 4y = -34$, а точка B — на окружности $x^2 + y^2 - 8x + 2y = 8$. Найдите наименьшее возможное расстояние между точками A и B.

§ 12 Метод координат

Мы часто говорим: прямая $y = 2x - 1$, парабола $y = x^2$, окружность $x^2 + y^2 = 1$, тем самым отождествляя фигуру с её уравнением. Такой подход позволяет сводить задачу о поиске свойств фигуры к задаче об исследовании её уравнения. В этом и состоит суть метода координат.

Проиллюстрируем сказанное на таком примере.

Из наглядных соображений очевидно, что прямая и окружность имеют не более двух общих точек. Однако такое утверждение не является аксиомой, поэтому его надо доказывать.

Данная задача сводится к определению количества решений системы уравнений

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ (x - m)^2 + (y - n)^2 = R^2, \end{cases}$$

где параметры a и b одновременно не равны нулю и $R > 0$.

Решая эту систему методом подстановки, получим квадратное уравнение, которое может иметь два решения, одно решение или не иметь решений. Следовательно, для данной системы существует три возможных случая:

1) система имеет два решения — прямая и окружность пересекаются в двух точках;

2) система имеет одно решение — прямая касается окружности;

3) система не имеет решений — прямая и окружность не имеют общих точек.

С каждым из этих случаев вы встречались, решая задачи 10.14—10.16 соответственно.

«Агитирует» за метод координат и такая задача: можно ли вписать в эллипс правильный шестиугольник?

Предположим, что в эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a \neq b)$ удалось вписать правильный шестиугольник. Опишем около шестиугольника окружность. Тогда эллипс и окружность имеют не менее шести общих точек.

Это означает, что если $x^2 + y^2 = R^2$ — уравнение описанной окружности, то система

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ x^2 + y^2 = R^2 \end{cases}$$

имеет не менее шести решений.

Нетрудно показать, что эта система имеет не более четырёх решений. Поэтому ответ на поставленный вопрос отрицательный.

Метод координат особенно эффективен в тех случаях, когда требуется найти фигуру, все точки которой обладают заданным свойством, т. е. найти ГМТ.

Зафиксируем на плоскости две точки A и B. Вы знаете, какой фигурой является геометрическое место точек M таких, что $\dfrac{MB}{MA} = k$, где $k \neq 1$. Это окружность (окружность Аполлония). С довольно непростым способом поиска этого ГМТ вы ознакомились в § 13 учебника «Геометрия, 8 класс». Метод координат позволяет решить эту задачу намного проще.

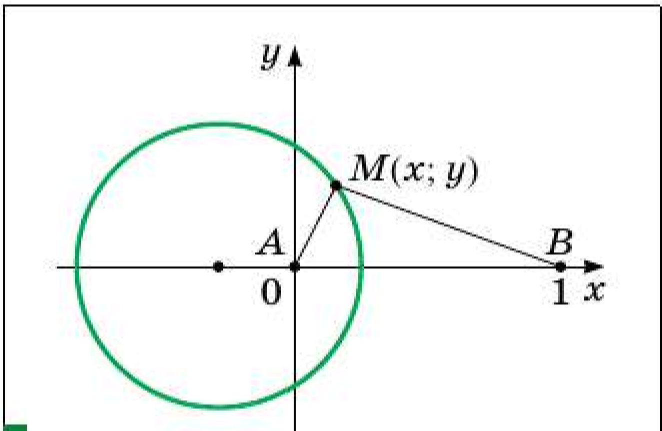


Рис. 12.1

Плоскость, на которой зафиксированы точки A и B, «превратим» в координатную. Сделаем это так: в качестве начала координат выберем точку A, в качестве единичного отрезка — отрезок AB, ось абсцисс проведём так, чтобы точка B имела координаты (1; 0) (рис. 12.1).

Точка $M\ (x;\ y)$ координатной плоскости принадлежит искомой фигуре F тогда и только тогда, когда $kMA = MB$, или $k^2MA^2 = MB^2$. Отсюда

$$k^2(x^2 + y^2) = (x - 1)^2 + y^2;$$
$$(k^2 - 1)\ x^2 + 2x + (k^2 - 1)\ y^2 = 1.$$

Поскольку $k \neq 1$, то можно записать:

$$x^2 + \frac{2}{k^2 - 1}x + y^2 = \frac{1}{k^2 - 1};$$

$$x^2 + \frac{2}{k^2 - 1}x + \frac{1}{(k^2 - 1)^2} + y^2 = \frac{1}{k^2 - 1} + \frac{1}{(k^2 - 1)^2};$$

$$\left(x + \frac{1}{k^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \frac{k^2}{(k^2 - 1)^2}. \qquad (1)$$

Таким образом, уравнением фигуры F является уравнение (1), т. е. фигура F — это окружность с центром в точке $O\left(\frac{1}{1-k^2}; 0\right)$ и радиуса $\frac{k}{|k^2-1|}$.

Отметим, что применение метода координат предусматривает выполнение определённой технической работы, связанной с преобразованиями выражений, решением уравнений или систем уравнений. Удачный выбор системы координат может значительно облегчить выкладки.

Превращая плоскость в координатную, мы некоторым точкам приписываем координаты, которые в составляемых уравнениях играют роль параметров. Естественно, надо стремиться к такому выбору системы координат, чтобы параметров было как можно меньше.

Например, можно предположить, что для задания четырёх вершин прямоугольника необходимо 8 параметров. Однако если ввести систему координат так, как показано на рисунке 12.2, то достаточно двух параметров.

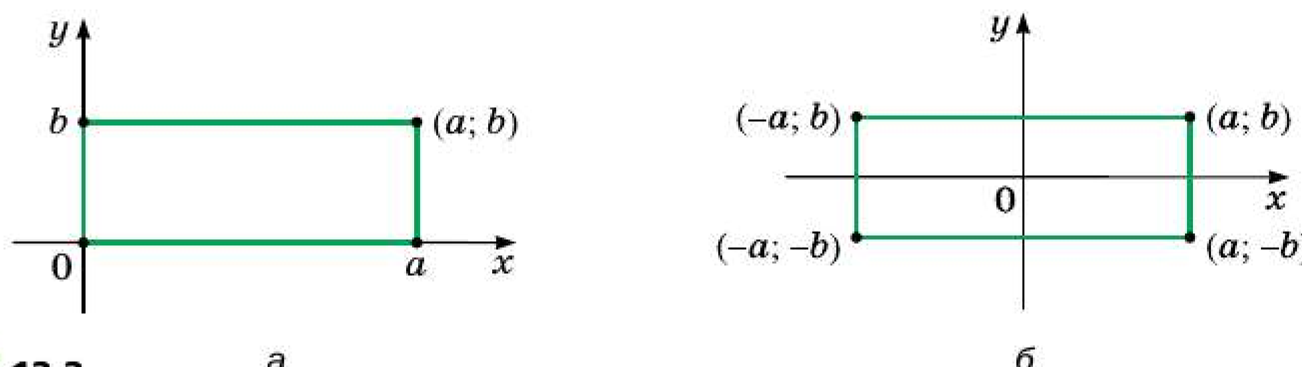


Рис. **12.2**

Задача (формула Лейбница). Пусть медианы треугольника ABC пересекаются в точке M. Докажите, что для любой точки X выполняется равенство

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3XM^2. \quad (1)$$

Решение. Чтобы задать координаты вершин треугольника, можно предположить, что нужно 6 параметров. Однако если выбрать систему координат так, как показано на рисунке 12.3, то можно ограничиться тремя параметрами.

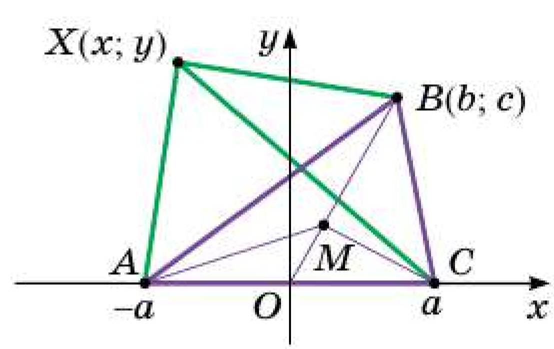


Рис. **12.3**

Так как $BM : MO = 2 : 1$, то точка M имеет координаты $\left(\frac{b}{3}; \frac{c}{3}\right)$.

Пусть $X\ (x;\ y)$ — произвольная точка. Тогда

$XA^2 = (x + a)^2 + y^2;$

$XB^2 = (x - b)^2 + (y - c)^2;$

$XC^2 = (x - a)^2 + y^2;$

$$MA^2 = \left(\frac{b}{3} + a\right)^2 + \frac{c^2}{9};$$

$$MB^2 = \left(\frac{b}{3} - b\right)^2 + \left(\frac{c}{3} - c\right)^2 = \frac{4b^2}{9} + \frac{4c^2}{9};$$

$$MC^2 = \left(\frac{b}{3} - a\right)^2 + \frac{c^2}{9};$$

$$XM^2 = \left(x - \frac{b}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{c}{3}\right)^2.$$

Теперь легко убедиться (сделайте это самостоятельно), что формула (1) верна. ■

Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716)

Немецкий математик, физик и философ, первый президент Берлинской академии наук. Ввёл много математических терминов и понятий (функция, алгоритм, координата и т. д.), заложил основы современной математической логики. Одновременно с И. Ньютоном, но независимо от него создал теорию дифференциального и интегрального исчислений.

? Опишите, в чём состоит суть метода координат.

Упражнения

12.1. Найдите ГМТ, разность квадратов расстояний от которых до двух данных точек A и B является величиной постоянной.

12.2. Найдите ГМТ, сумма квадратов расстояний от которых до двух данных точек A и B является величиной постоянной.

12.3. Найдите ГМТ, сумма квадратов расстояний от которых до вершин A и B треугольника ABC равна квадрату расстояния до третьей его вершины — точки C.

12.4. Найдите ГМТ, сумма квадратов расстояний от которых до вершин треугольника ABC является величиной постоянной.

12.5. Даны две точки A и B. Найдите геометрическое место точек M таких, что $AM^2 + 2BM^2 = 6AB^2$.

12.6. Даны две точки A и B. Найдите геометрическое место точек M таких, что $2AM^2 - BM^2 = 2AB^2$.

12.7. Даны две точки A и B. Найдите геометрическое место точек C таких, что медиана AD треугольника ABC имеет постоянную длину d.

12.8. Даны две точки A и B. Найдите геометрическое место точек C таких, что медиана AD треугольника ABC равна его стороне BC.

12.9. Даны две точки A и B. Найдите геометрическое место точек C таких, что высота CD треугольника ABC равна его медиане AM.

12.10. Дан прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$). Найдите геометрическое место точек M таких, что $MA^2 + MB^2 = 2MC^2$.

◆ ◆ ◆

12.11. На отрезке AB произвольным образом выбирают точку C. В одной полуплоскости от прямой AB на отрезках AC и CB как на сторонах строят квадраты. Найдите геометрическое место середин отрезков, соединяющих центры квадратов.

12.12. На отрезке AB произвольным образом выбирают точку C. В одной полуплоскости от прямой AB на отрезках AC и CB как на сторонах строят равносторонние треугольники AMC и CNB. Докажите, что середина отрезка MB, середина отрезка NA и точка C являются вершинами равностороннего треугольника.

12.13. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен $2\sqrt{3}$. На стороне AB отметили точку D так, что $AD = 2DB$ и $CD = 2\sqrt{2}$. Найдите площадь треугольника ABC, если $\angle ACB = 60°$.

12.14. Хорда AB стягивает дугу, градусная мера которой равна 120°. Точка C лежит на этой дуге, а точка D — на хорде AB. Известно, что $AD = 2$, $BD = 1$, $CD = \sqrt{2}$. Найдите площадь треугольника ABC.

12.15. На диагоналях AC и BD параллелограмма $ABCD$ отметили соответственно точки P и Q так, что $AP : PC = 2 : 3$ и $BQ : QD = 1 : 4$. Найдите длину отрезка PQ, если $AB = 5$, $AD = 3$, $\angle ADB = 90°$.

12.16. Через произвольную точку M меньшей из двух концентрических окружностей, радиусы которых равны R и r, $R > r$, провели хорду BC большей окружности и хорду MA меньшей окружности (рис. 12.4). Известно, что $BC \perp MA$. Найдите сумму $MA^2 + MB^2 + MC^2$.

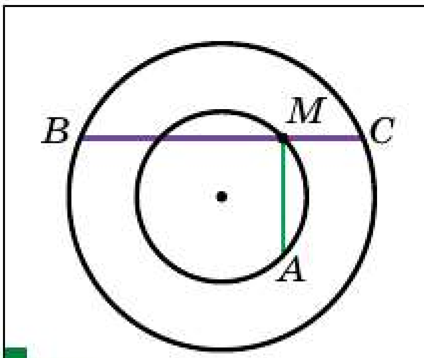


Рис. 12.4

12.17. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $(a-c)^2+(b-d)^2$, если $a^2+b^2=1$, $c^2+d^2=4$.

12.18. В ромб $ABCD$ с острым углом $45°$ вписана окружность. Докажите, что для любой точки X окружности выполняется равенство $XA^2+XB^2+XC^2+XD^2=\frac{5}{2}AB^2$.

12.19. В ромб $ABCD$ с острым углом $60°$ вписана окружность. Докажите, что для любой точки X окружности выполняется равенство $XA^2+XB^2+XC^2+XD^2=\frac{11}{4}AB^2$.

12.20. В квадрат $ABCD$ вписана окружность единичного радиуса. Докажите, что для любой точки X окружности выполняется равенство $XA^2\cdot XC^2+XB^2\cdot XD^2=10$.

12.21. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ стороны AB и CD продлили до их пересечения в точке K. Докажите, что для любой точки X окружности, описанной около шестиугольника, выполняется равенство $XK^2=XB^2+XC^2$.

12.22. На диаметре окружности с центром O радиуса R отметили точку M. Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки M до концов хорды, параллельной этому диаметру, не зависит от выбора хорды.

12.23. На диаметре окружности радиуса R отметили две точки, равноудалённые от центра. Через одну из них провели хорду, концы которой соединили с другой точкой. Докажите, что сумма квадратов сторон полученного треугольника не зависит от выбора хорды.

12.24. В окружности с центром O проведены два перпендикулярных диаметра AB и CD. На радиусе OB отметили точку K так, что $OK=\frac{1}{3}OB$, а на радиусе OD — точку M так, что $OM=\frac{1}{2}OD$. Докажите, что точка пересечения прямых CK и AM принадлежит данной окружности.

12.25. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярны. Через середины сторон AB и AD проведены прямые, перпендикулярные соответственно сторонам DC и BC. Докажите, что точка пересечения проведённых прямых принадлежит прямой AC.

КОГДА СДЕЛАНЫ УРОКИ

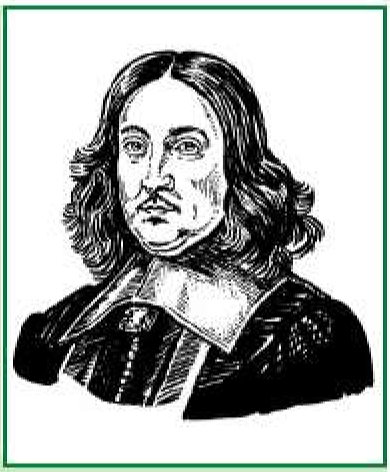
Как строили мост между геометрией и алгеброй

Идея координат зародилась очень давно. Ведь ещё в старину люди изучали Землю, наблюдали звёзды, а по результатам своих исследований составляли карты и схемы.

Во II в. до н. э. древнегреческий учёный Гиппарх впервые использовал идею координат для определения места расположения объектов на поверхности Земли.

Только в XIV в. французский учёный Никола Орем (ок. 1323—1382) впервые применил в математике идею Гиппарха: он разбил плоскость на клетки (как разбита страница вашей тетради) и стал задавать положение точек широтой и долготой.

Однако огромные возможности применения этой идеи были раскрыты лишь в XVII в. в работах выдающихся французских математиков Пьера Ферма (1601—1665) и Рене Декарта (1596—1650). В своих трудах эти учёные показали, как благодаря системе координат можно переходить от точек к числам, от линий к уравнениям, от геометрии к алгебре.



Пьер Ферма

Рене Декарт

Несмотря на то, что П. Ферма опубликовал свою работу на год раньше Р. Декарта, систему координат, которой мы сегодня пользуемся, называют **декартовой**. Р. Декарт в своей работе «Рассуждение о методе» предложил новую удобную буквенную символику, которой с незначительными изменениями мы пользуемся и сегодня. Вслед за Декартом мы обозначаем переменные последними буквами латинского алфавита x, y, z, а коэффициенты — первыми: a, b, c, ... Привычные нам обозначения степеней x^2, y^3, z^5 и т. д. также ввёл Р. Декарт.

Радикальная ось двух окружностей

Рассмотрим окружность радиуса R с центром в точке O. Пусть M — произвольная точка. Обозначим $MO = d$. Величину, равную $d^2 - R^2$, называют **степенью точки M относительно данной окружности.**

Если точка M лежит внутри окружности (рис. 12.5, *а*), то её степень отрицательна; если точка M принадлежит окружности (рис. 12.5, *б*), то её степень равна нулю; если точка M лежит вне окружности (рис. 12.5, *в*), то её степень положительна.

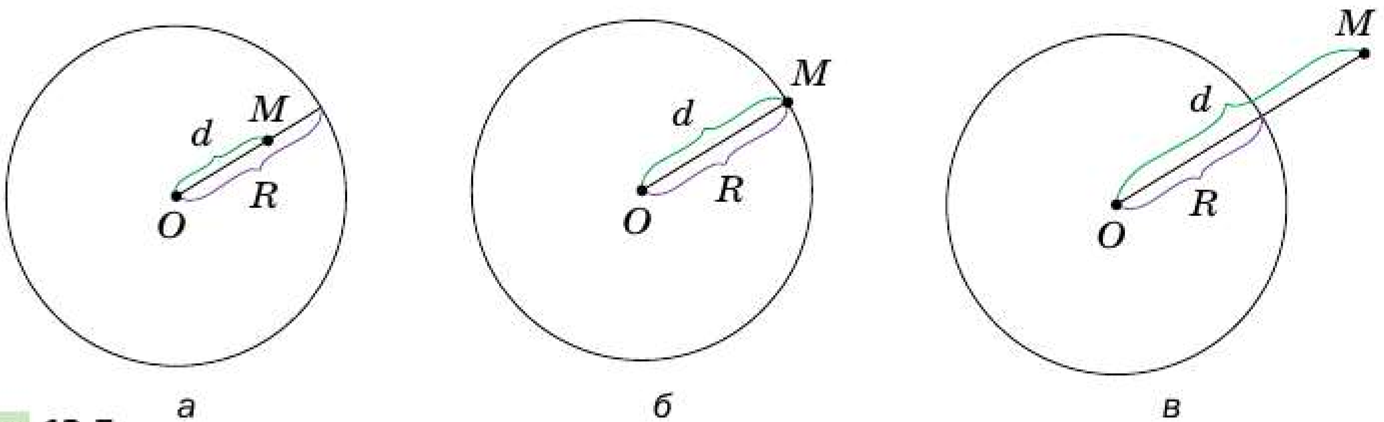


Рис. **12.5**

Через точку M, лежащую вне окружности, проведём касательную MA (рис. 12.6). Так как $OA \perp MA$, то $MA^2 = MO^2 - OA^2 = d^2 - R^2$, т. е. величина MA^2 равна степени точки M относительно данной окружности.

Рассмотрим две окружности с центрами O_1 и O_2 и радиусами R_1 и R_2 соответственно. Найдём ГМТ, которые имеют одинаковую степень относительно данных окружностей.

Точка X принадлежит искомому ГМТ тогда и только тогда, когда $XO_1^2 - R_1^2 = XO_2^2 - R_2^2$. Отсюда

$$XO_1^2 - XO_2^2 = R_1^2 - R_2^2.$$

Поскольку разность $R_1^2 - R_2^2$ для данных окружностей является величиной постоянной, то из ключевой задачи 12.1 следует, что искомым ГМТ является прямая, перпендикулярная прямой O_1O_2. Эту прямую называют **радикальной осью** данных окружностей.

Пусть окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B (рис. 12.7). Точки A и B относительно данных окружностей имеют степень, равную 0. Следовательно, они принадлежат радикальной оси этих окружностей. Это означает, что прямая AB — радикальная ось.

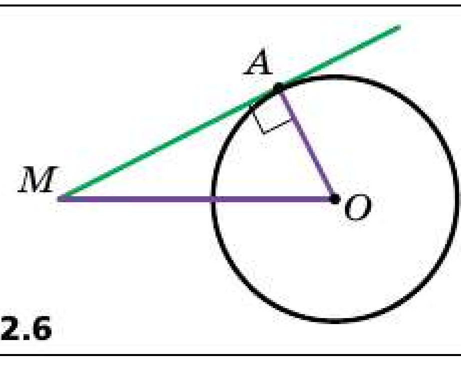


Рис. **12.6**

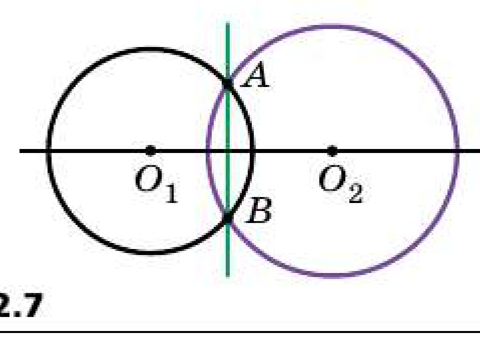


Рис. **12.7**

Если окружности касаются в точке A (рис. 12.8), то их радикальная ось проходит через точку A и перпендикулярна прямой O_1O_2 (подумайте почему).

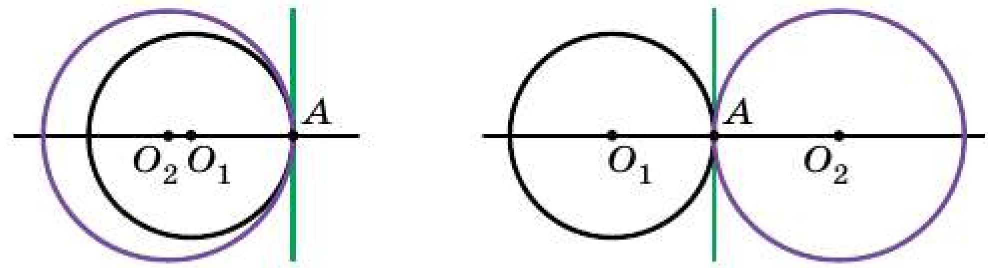


Рис. **12.8**

Если через точку X, принадлежащую радикальной оси двух окружностей, проведены к этим окружностям касательные XA и XB (A и B — точки касания), то получим, что $XA = XB$ (рис. 12.9). Это свойство подсказывает, как построить радикальную ось двух окружностей, изображённых на рисунке 12.9.

Проведём две общие внешние касательные AB и CD (A, B, C и D — точки касания). Пусть точки M и N — середины соответственно отрезков AB и CD (рис. 12.10). Тогда эти точки имеют одинаковую степень относительно данных окружностей. Следовательно, прямая MN — радикальная ось.

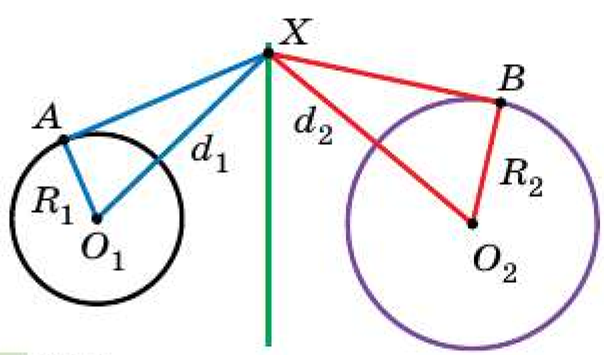


Рис. **12.9**

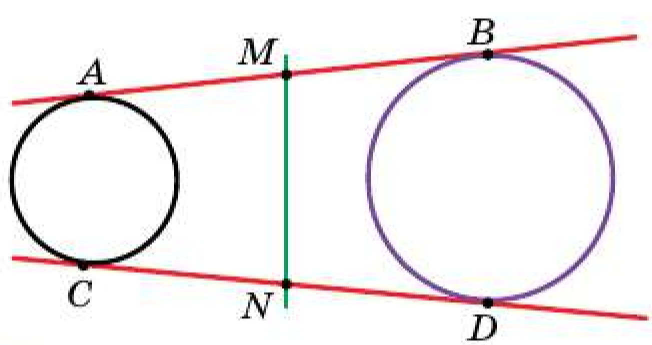


Рис. **12.10**

Понятно, что радикальную ось этих окружностей можно построить, проведя их общие внутренние касательные EF и PQ (E, F, P и Q — точки касания).

Из сказанного следует, что середины отрезков AB, CD, EF и PQ лежат на одной прямой, перпендикулярной прямой O_1O_2 (рис. 12.11).

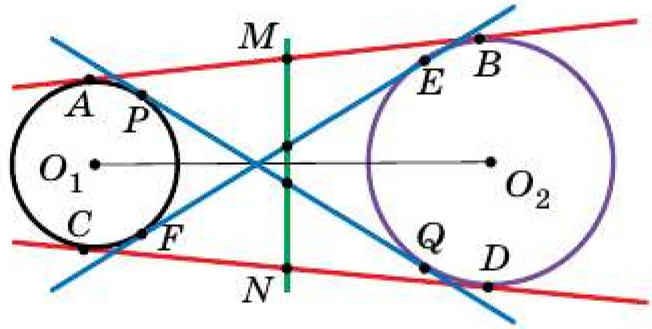


Рис. **12.11**

Докажите самостоятельно, что окружности, центры которых совпадают, не имеют радикальной оси.

Теорема

Если центры трёх окружностей не лежат на одной прямой и для каждой пары окружностей проведена радикальная ось, то все три радикальные оси пересекаются в одной точке.

Доказательство

Обозначим центры окружностей O_1, O_2, O_3. Пусть прямые l_1 и l_2 — радикальные оси окружностей с центрами O_1, O_2 и O_2, O_3 соответственно. Поскольку точки O_1, O_2 и O_3 не лежат на одной прямой, то $l_1 \cap l_2 \neq \varnothing$. Пусть $l_1 \cap l_2 = M$ (рис. 12.12). Тогда точка M имеет одинаковую степень относительно окружностей с центрами O_1 и O_3, а следовательно, принадлежит радикальной оси l_3 этих окружностей. Таким образом, прямые l_1, l_2 и l_3 пересекаются в одной точке. Её называют **радикальным центром** трёх окружностей. ■

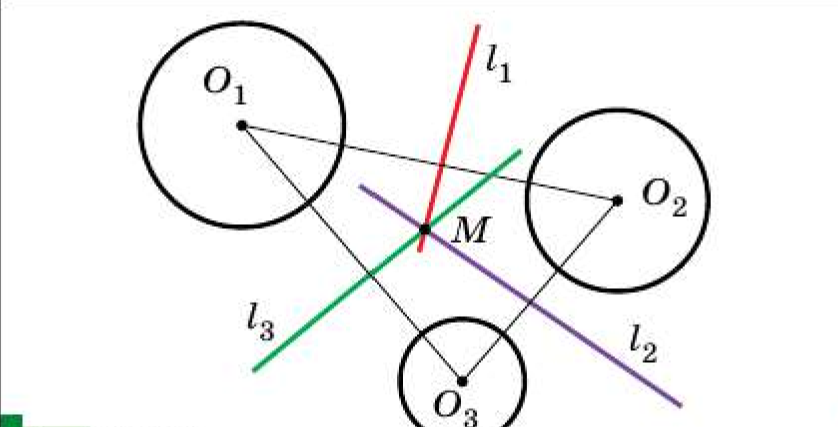


Рис. **12.12**

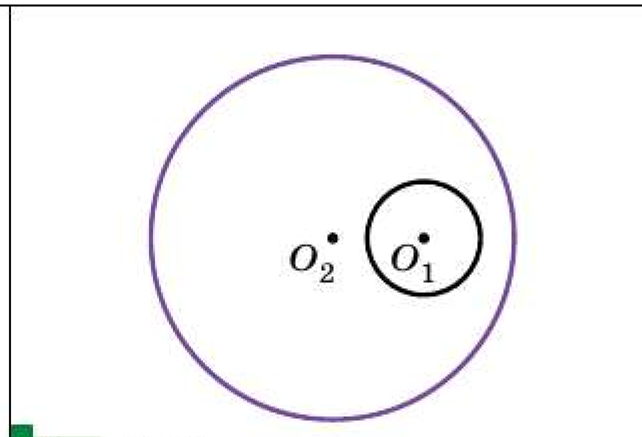


Рис. **12.13**

Покажем, как с помощью этой теоремы построить радикальную ось окружностей, расположенных так, как показано на рисунке 12.13.

Проведём третью окружность, центр которой не лежит на прямой O_1O_2 и которая пересекает каждую из данных окружностей в двух точках. Точки пересечения отмечены на рисунке 12.14 буквами A, B, C и D. Тогда точка M пересечения

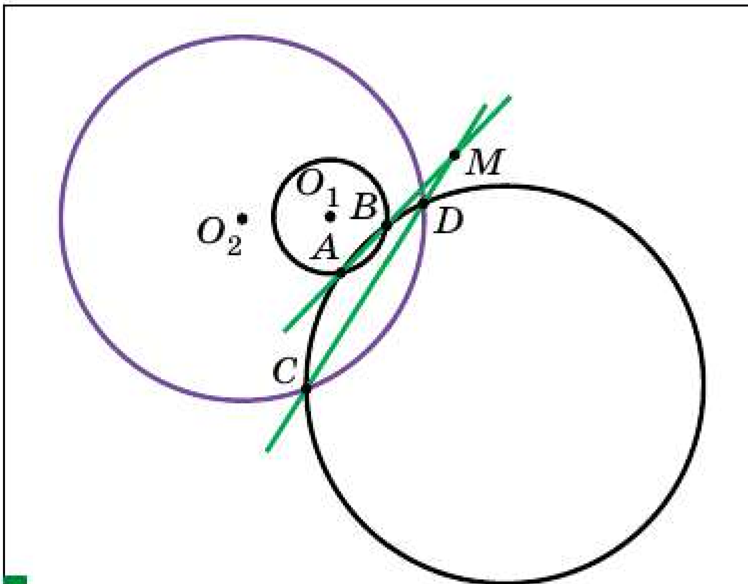


Рис. **12.14**

прямых AB и CD принадлежит радикальной оси окружностей с центрами O_1 и O_2. Осталось провести через точку M прямую, перпендикулярную прямой O_1O_2. Она и будет искомой радикальной осью.

Упражнения

1. Три окружности попарно касаются внешним образом (рис. 12.15), A, B и C — точки касания. Общие касательные к окружностям, проведённые через точки A и B, пересекаются в точке M. Докажите, что $MA = MB = MC$.

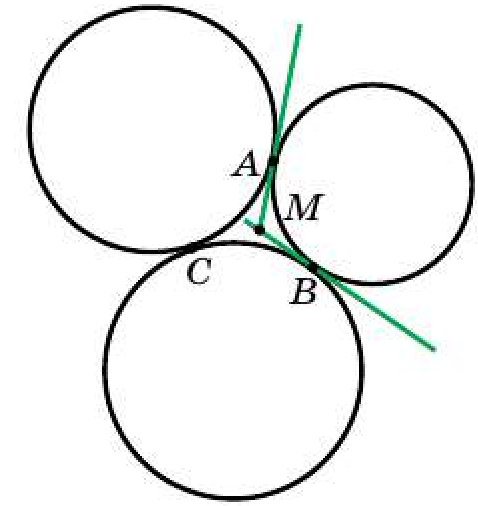


Рис. **12.15**

2. Даны окружность и две точки, лежащие вне этой окружности. Постройте окружность, которая касается данной окружности и проходит через данные точки.

Указание. Радикальной осью данной и искомой окружностей является их общая касательная. Эта касательная проходит через радикальный центр трёх окружностей: данной окружности и любых двух окружностей, проходящих через две данные точки.

3. На сторонах BC и AC треугольника ABC отметили соответственно точки A_1 и B_1. На отрезках AA_1 и BB_1 как на диаметрах построили окружности, которые пересекаются в точках M и N. Докажите, что прямая MN содержит ортоцентр треугольника ABC.

Указание. Докажите, что ортоцентр треугольника ABC является радикальным центром двух указанных окружностей и окружности, построенной на стороне AB как на диаметре.

4. Точки A, B, C и D в указанном порядке лежат на одной прямой. Окружности с диаметрами AC и BD пересекаются в точках X и Y. Пусть P — точка на прямой XY. Прямая CP пересекает окружность с диаметром AC в точках C и M, а прямая BP пересекает окружность с диаметром BD в точках B и N. Докажите, что прямые AM, ND, XY пересекаются в одной точке.

Указание. Докажите, что точки A, M, N и D лежат на одной окружности. Радикальный центр этой окружности и окружностей с диаметрами AC и BD и является точкой пересечения прямых AM, ND и XY.

Расстояние между двумя точками

Расстояние между точками $A\,(x_1;\ y_1)$ и $B\,(x_2;\ y_2)$ равно $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Координаты точки, делящей отрезок

Если точка $M(x_0;\ y_0)$ делит отрезок AB в отношении $\dfrac{AM}{MB} = \lambda$, то координаты этой точки можно вычислить по формулам $x_0 = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$, $y_0 = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$, где $(x_1;\ y_1)$ и $(x_2;\ y_2)$ — координаты соответственно точек A и B.

Уравнение фигуры

Уравнением фигуры F, заданной на плоскости xy, называют уравнение с двумя переменными x и y, обладающее такими свойствами:

1) если точка принадлежит фигуре F, то её координаты являются решением данного уравнения;

2) любое решение $(x;\ y)$ данного уравнения является координатами точки, принадлежащей фигуре F.

Уравнение окружности

Уравнение окружности радиуса R с центром в точке $A\,(a;\ b)$ имеет вид $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

Любое уравнение вида $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, где a, b и R — некоторые числа, причём $R > 0$, является уравнением окружности радиуса R с центром в точке с координатами $(a;\ b)$.

Эллипс

Эллипсом называют геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2 является постоянной величиной, большей чем F_1F_2. Точки F_1 и F_2 называют фокусами эллипса.

Гипербола

Гиперболой называют геометрическое место точек, модуль разности расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2 является постоянной величиной, меньшей чем F_1F_2. Точки F_1 и F_2 называют фокусами гиперболы.

Уравнение прямой

Уравнение прямой имеет вид $ax + by = c$, где a, b и c — некоторые числа, причём a и b не равны нулю одновременно.

Любое уравнение вида $ax + by = c$, где a, b и c — некоторые числа, причём a и b не равны нулю одновременно, является уравнением прямой.

Уравнение	Значение a, b, c	График
$ax + by = c$	$b \neq 0$, a и c — любые	Невертикальная прямая
	$b = 0$, $a \neq 0$, c — любое	Вертикальная прямая
	$a = b = c = 0$	Вся координатная плоскость
	$a = b = 0$, $c \neq 0$	Пустое множество

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

- Уравнение $y = kx + b$, где $k = \operatorname{tg} \alpha$, α — угол, который образует эта прямая с положительным направлением оси абсцисс, называют уравнением прямой с угловым коэффициентом.
- Уравнение прямой с данным угловым коэффициентом k, проходящей через данную точку $M(x_0; y_0)$, имеет вид $y = k(x - x_0) + y_0$.
- Прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ параллельны тогда и только тогда, когда $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$.
- Прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $k_1k_2 = -1$.

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, имеет вид $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

Расстояние от точки до прямой

Расстояние от точки $M(x_0; y_0)$ до прямой, заданной уравнением $ax + by + c = 0$, равно $\dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

глава

4 Векторы

- Изучив материал этой главы, вы узнаете, что векторы существуют не только в физике, но и в геометрии.
- Вы научитесь складывать и вычитать векторы, умножать вектор на число, находить угол между двумя векторами, применять свойства векторов для решения задач.

§ 13 Понятие вектора

Вы знаете много величин, которые определяются своими числовыми значениями: масса, площадь, длина, объём, время, температура и т. д. Такие величины называют **скалярными величинами** или **скалярами**.

Из курса физики вам знакомы величины, для задания которых недостаточно знать только их числовое значение. Например, если на пружину действует сила 5 Н, то из этой информации не ясно, будет ли пружина сжиматься или растягиваться (рис. 13.1). Надо ещё знать, в каком направлении действует сила.

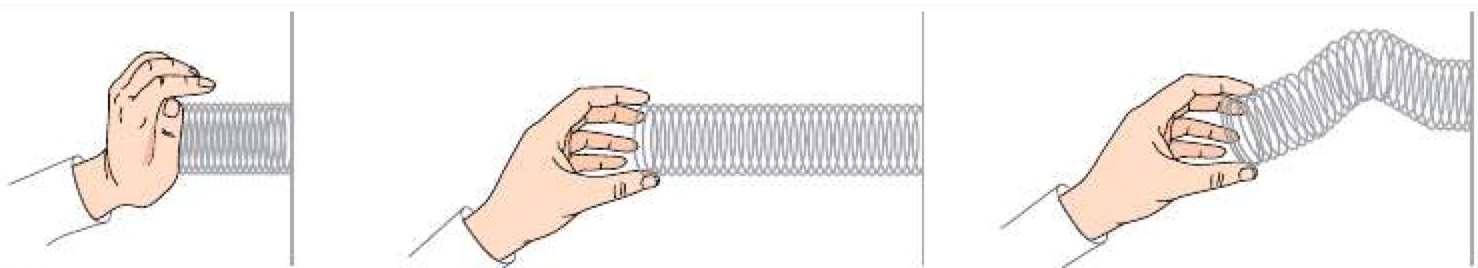


Рис. 13.1

Величины, которые определяются не только числовым значением, но и направлением, называют **векторными величинами** или **векторами**.

Сила, перемещение, скорость, ускорение, вес — примеры векторных величин.

Есть векторы и в геометрии.

Рассмотрим отрезок AB. Если мы договоримся точку A считать **началом** отрезка, а точку B — его **концом**, то такой отрезок будет характеризоваться не только длиной, но и направлением от точки A к точке B.

Если указано, какая точка является началом отрезка, а какая точка — его концом, то такой отрезок называют **направленным отрезком** или **вектором**.

Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначают так: $\overrightarrow{AB}$ (читают: «вектор AB»).

На рисунках вектор изображают отрезком со стрелкой, указывающей его конец. На рисунке 13.2 изображены векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{MN}$.

Для обозначения векторов также используют строчные буквы латинского алфавита со стрелкой сверху. На рисунке 13.3 изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Вектор, у которого начало и конец — одна и та же точка, называют **нулевым вектором** или **нуль-вектором** и обозначают $\vec{0}$. Если начало и конец нулевого вектора — это точка A, то его можно обозначить и так: $\overrightarrow{AA}$.

Модулем вектора $\overrightarrow{AB}$ называют длину отрезка AB. Модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ обозначают так: $|\overrightarrow{AB}|$, а модуль вектора $\vec{a}$ — так: $|\vec{a}|$.

Модуль нулевого вектора считают равным нулю. Имеем: $|\vec{0}| = 0$.

Определение

Ненулевые векторы называют коллинеарными, если они лежат на параллельных прямых или на одной прямой.

Нулевой вектор считают коллинеарным любому вектору.

На рисунке 13.4 изображены коллинеарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\overrightarrow{MN}$.

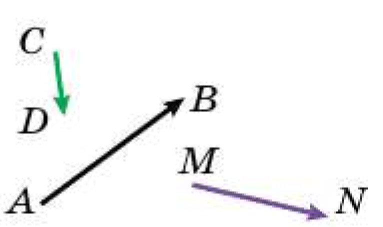


Рис. 13.2

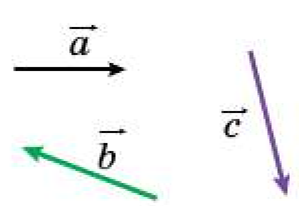


Рис. 13.3

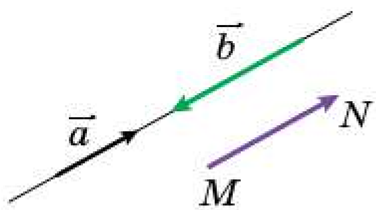


Рис. 13.4

Тот факт, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, обозначают так: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

На рисунке 13.5 ненулевые коллинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ одинаково направлены. Такие векторы называют **сонаправленными** и обозначают так: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.

Понятно, что ***если*** $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ ***и*** $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{c}$, ***то*** $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c}$ (рис. 13.6).

На рисунке 13.7 ненулевые коллинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ **противоположно направлены**. Этот факт обозначают так: $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

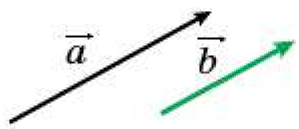


Рис. 13.5

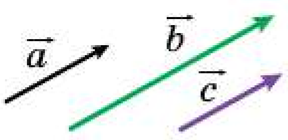


Рис. 13.6

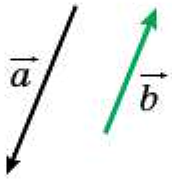


Рис. 13.7

Нулевой вектор не считают сонаправленным (противоположно направленным) ни с каким другим вектором.

Определение

Два ненулевых вектора называют равными, если их модули равны и они сонаправлены. Любые два нулевых вектора равны.

На рисунке 13.8 изображены равные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Это обозначают так: $\vec{a} = \vec{b}$.

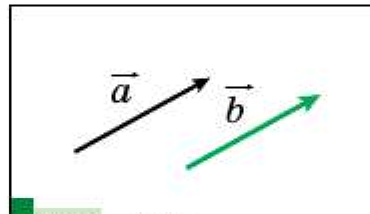


Рис. **13.8**

Равенство ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ означает, что $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ и $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

Очевидно, что если $\vec{a} = \vec{b}$ и $\vec{b} = \vec{c}$, то $\vec{a} = \vec{c}$.

Часто, говоря о векторах, мы не конкретизируем, какая точка является началом вектора. Так, на рисунке 13.9, *а* изображён вектор $\vec{a}$. На рисунке 13.9, *б* изображены векторы, равные вектору $\vec{a}$. Каждый из них тоже принято называть вектором $\vec{a}$. На рисунке 13.9, *в* изображены вектор $\vec{a}$ и точка A. Если построить вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}$, то говорят, что вектор $\vec{a}$ **отложен от точки** A (рис. 13.9, *г*).

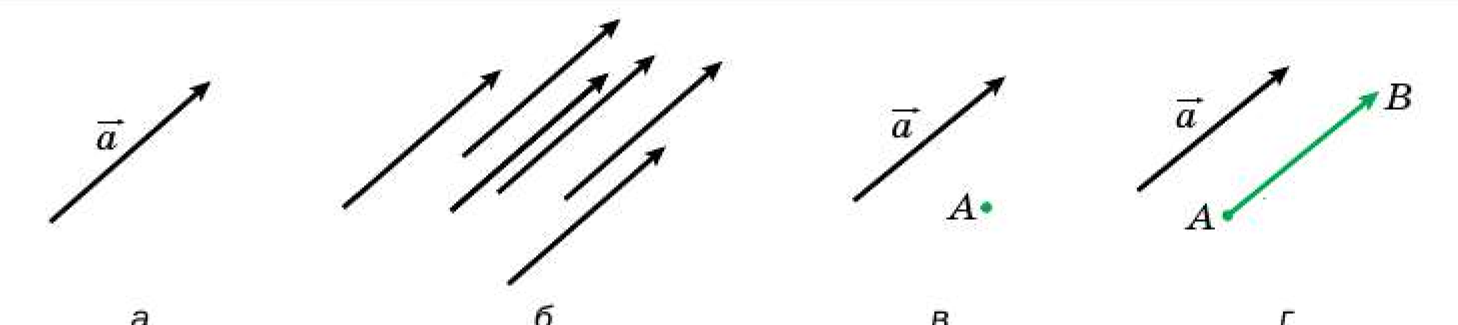


Рис. **13.9**

Покажем, как от произвольной точки M отложить вектор, равный данному вектору $\vec{a}$.

Если вектор $\vec{a}$ нулевой, то искомым вектором будет вектор $\overrightarrow{MM}$.

Теперь рассмотрим случай, когда $\vec{a} \neq \vec{0}$. Пусть точка M лежит на прямой, содержащей вектор $\vec{a}$ (рис. 13.10). На этой прямой существуют две точки E и F такие, что $ME = MF = |\vec{a}|$. На этом рисунке вектор $\overrightarrow{MF}$ будет сонаправлен вектору $\vec{a}$. Его и следует выбрать.

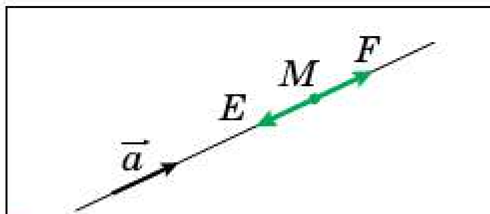


Рис. **13.10**

Если точка M не принадлежит прямой, содержащей вектор $\vec{a}$, то через точку M проведём прямую, ей параллельную (рис. 13.11). Дальнейшее построение аналогично уже рассмотренному.

Ясно, что *от данной точки можно отложить только один вектор, равный данному*.

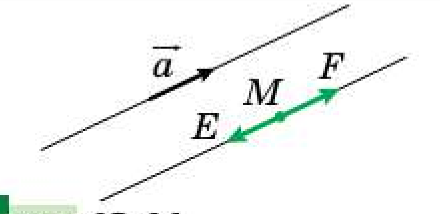


Рис. **13.11**

Задача. Дан четырёхугольник $ABCD$. Известно, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ и $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$. Определите вид четырёхугольника $ABCD$.

Решение. Из условия $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ следует, что $AB \parallel DC$ и $AB = DC$. Следовательно, четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Равенство $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$ означает, что диагонали четырёхугольника $ABCD$ равны. А параллелограмм с равными диагоналями является прямоугольником. ■

1. Приведите примеры скалярных величин.
2. Какие величины называют векторными?
3. Что в геометрии называют векторами?
4. Какой отрезок называют направленным отрезком или вектором?
5. Как обозначают вектор с началом в точке A и концом в точке B?
6. Какой вектор называют нулевым?
7. Что называют модулем вектора $\overrightarrow{AB}$?
8. Чему равен модуль нулевого вектора?
9. Какие векторы называют коллинеарными?
10. Какие векторы называют равными?

Практические задания

13.1. Даны вектор $\vec{a}$ и точка A (рис. 13.12). Отложите от точки A вектор, равный вектору $\vec{a}$.

13.2. Даны вектор $\vec{b}$ и точка B (рис. 13.13). Отложите от точки B вектор, равный вектору $\vec{b}$.

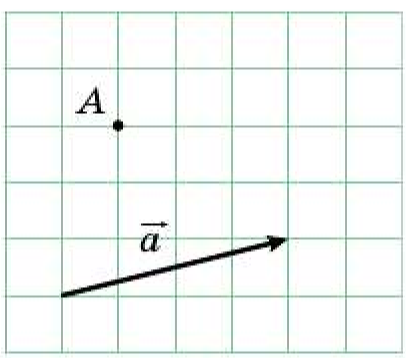


Рис. **13.12**

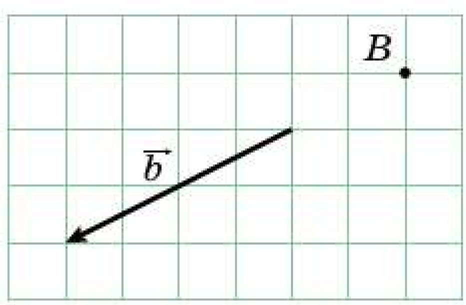


Рис. **13.13**

13.3. Начертите треугольник ABC и отметьте точку M — середину стороны BC. От точки M отложите вектор, равный вектору $\overrightarrow{AM}$, а от точки B — вектор, равный вектору $\overrightarrow{AC}$. Докажите, что концы построенных векторов совпадают.

13.4. Начертите треугольник ABC. От точек B и C отложите векторы, соответственно равные векторам $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$. Докажите, что концы построенных векторов совпадают.

13.5. Катер из точки A переместился на север на 40 км в точку B, а затем на запад на 60 км из точки B в точку C. Выбрав масштаб, начертите векторы, изображающие перемещения из точки A в точку B, из точки B в точку C, из точки A в точку C.

Упражнения

13.6. Укажите векторы, начала и концы которых находятся в вершинах квадрата $ABCD$, равные вектору: 1) $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{DA}$.

13.7. В ромбе $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Укажите векторы, начала и концы которых находятся в точках A, B, C, D, O, равные вектору: 1) $\overrightarrow{DC}$; 2) $\overrightarrow{AO}$.

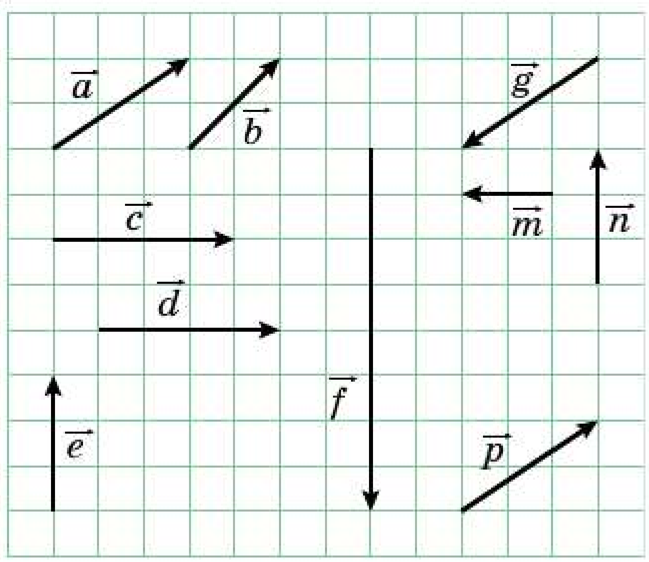


Рис. **13.14**

13.8. Какие из векторов, изображённых на рисунке 13.14: 1) равны; 2) сонаправлены; 3) противоположно направлены; 4) коллинеарны?

13.9. Точки M и N — соответственно середины сторон AB и CD параллелограмма $ABCD$. Укажите векторы, начала и концы которых находятся в точках A, B, C, D, M, N: 1) равные вектору $\overrightarrow{AM}$; 2) коллинеарные вектору $\overrightarrow{CD}$; 3) противоположно направленные с вектором $\overrightarrow{NC}$; 4) сонаправленные с вектором $\overrightarrow{BC}$.

13.10. Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Укажите, какие векторы, начала и концы которых находятся в точках A, B, C, D, O: 1) равны; 2) сонаправлены; 3) противоположно направлены.

13.11. Точки M, N, P — соответственно середины сторон AB, BC, CA треугольника ABC. Укажите векторы, начала и концы которых находятся в точках A, B, C, M, N, P: 1) равные вектору $\overrightarrow{MN}$; 2) коллинеарные вектору $\overrightarrow{AB}$; 3) противоположно направленные с вектором $\overrightarrow{MP}$; 4) сонаправленные с вектором $\overrightarrow{CA}$.

13.12. Верно ли утверждение:

1) если $\vec{m} = \vec{n}$, то $|\vec{m}| = |\vec{n}|$;

2) если $\vec{m} = \vec{n}$, то $\vec{m} \parallel \vec{n}$;

3) если $\vec{m} = \vec{n}$, то $\vec{m} \upuparrows \vec{n}$;

4) если $\vec{m} \neq \vec{n}$, то $|\vec{m}| \neq |\vec{n}|$?

13.13. Докажите, что если четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

13.14. Определите вид четырёхугольника $ABCD$, если $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{DA}$.

13.15. Определите вид четырёхугольника $ABCD$, если векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ коллинеарны и $|\overrightarrow{BC}| \neq |\overrightarrow{AD}|$.

13.16. Найдите модули векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 13.15), если сторона клетки равна 0,5 см.

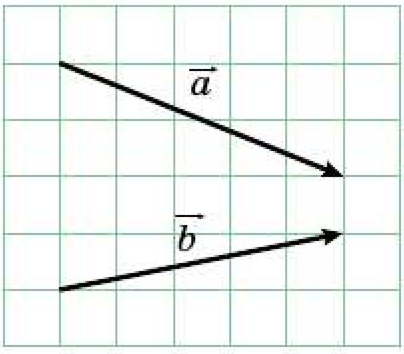


Рис. **13.15**

13.17. В прямоугольнике $ABCD$ известно, что $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, O — точка пересечения диагоналей. Найдите модули векторов $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{OC}$.

13.18. В прямоугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Известно, что $|\overrightarrow{AB}| = 5$ см, $|\overrightarrow{AO}| = 6{,}5$ см. Найдите модули векторов $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{AD}$.

13.19. Известно, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Верно ли, что точки A, B, C и D являются вершинами параллелограмма?

13.20. Известно, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Какие ещё равные векторы задают точки A, B, C и D?

13.21. Дан четырёхугольник $ABCD$. Известно, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ и $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$. Определите вид четырёхугольника $ABCD$.

13.22. Дан четырёхугольник $ABCD$. Известно, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны и $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$. Определите вид четырёхугольника $ABCD$.

13.23. Что можно сказать о векторе $\overrightarrow{AB}$, если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$?

13.24. В прямоугольном треугольнике ABC точка M — середина гипотенузы AB и $\angle B = 30°$. Найдите модули векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{MC}$, если $AC = 2$ см.

13.25. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) медиана CM равна 6 см. Найдите модули векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, если $\angle A = 30°$.

13.26. Известно, что векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ неколлинеарны. Вектор $\vec{a}$ коллинеарен каждому из векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Докажите, что вектор $\vec{a}$ является нулевым.

13.27. Известно, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны. Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой. Верно ли обратное утверждение: если точки A, B и C лежат на одной прямой, то векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны?

13.28. Для четырёх точек A, B, C, D известно, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Докажите, что середины отрезков AD и BC совпадают. Докажите обратное утверждение: если середины отрезков AD и BC совпадают, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

13.29. Известно, что $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{ON}$. Докажите, что точка O — середина отрезка MN. Докажите обратное утверждение: если точка O — середина отрезка MN, то $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{ON}$.

§ 14 Координаты вектора

Рассмотрим на координатной плоскости вектор $\vec{a}$. От начала координат отложим равный ему вектор $\overrightarrow{OA}$ (рис. 14.1). **Координатами вектора** $\vec{a}$ будем называть координаты точки A. Запись $\vec{a}\,(x;\ y)$ означает, что вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(x;\ y)$.

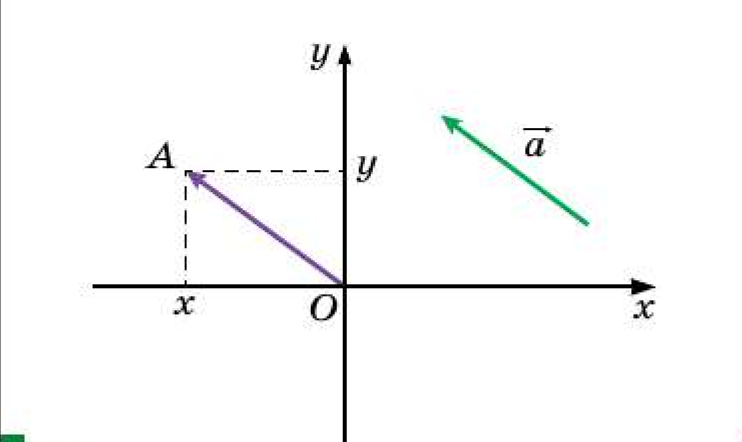


Рис. 14.1

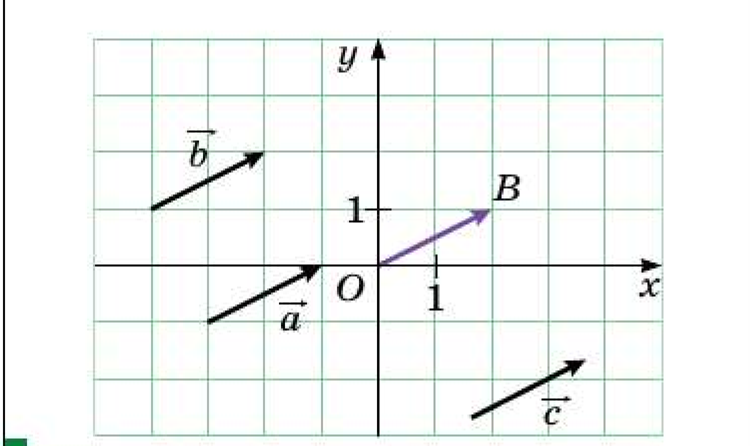


Рис. 14.2

Числа x и y называют соответственно **первой** и **второй координатами вектора** $\vec{a}$.

Из определения следует, что ***равные векторы имеют равные соответствующие координаты***. Например, каждый из равных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (рис. 14.2) имеет координаты (2; 1).

Справедливо и обратное утверждение: ***если соответствующие координаты векторов равны, то равны и сами векторы***.

Действительно, если отложить такие векторы от начала координат, то их концы совпадут.

Очевидно, что нулевой вектор имеет координаты (0; 0).

Теорема 14.1

Если точки A $(x_1; y_1)$ и B $(x_2; y_2)$ соответственно являются началом и концом вектора $\vec{a}$, то числа $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$ равны соответственно первой и второй координатам вектора $\vec{a}$.

Доказательство

Если $\vec{a} = \vec{0}$, то утверждение теоремы очевидно. Пусть $\vec{a} \uparrow \vec{0}$. Отложим от начала координат вектор $\overrightarrow{OM}$, равный вектору $\overrightarrow{AB}$. Если обозначить координаты точки M через $(a_1; a_2)$, то требуется доказать равенства $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$.

Так как $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$, то, воспользовавшись результатом ключевой задачи 13.28, можем сделать вывод, что середины отрезков OB и AM совпадают. Координаты середин отрезков OB и AM соответственно равны $\left(\frac{0 + x_2}{2}; \frac{0 + y_2}{2}\right)$ и $\left(\frac{x_1 + a_1}{2}; \frac{y_1 + a_2}{2}\right)$. Тогда $\frac{0 + x_2}{2} = \frac{x_1 + a_1}{2}$, $\frac{0 + y_2}{2} = \frac{y_1 + a_2}{2}$. Эти равенства остаются справедливыми и тогда, когда точка O совпадает с точкой B или точка A совпадает с точкой M.

Отсюда $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$. ■

Если вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(a_1; a_2)$, то из формулы расстояния между двумя точками следует, что

$$\boxed{\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

Задача. Даны координаты трёх вершин параллелограмма $ABCD$: A (3; –2), B (–4; 1), C (–2; –3). Найдите координаты вершины D.

Решение. Так как четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Следовательно, координаты этих векторов равны.

Пусть координаты точки D равны $(x;\ y)$. Для нахождения координат векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ воспользуемся теоремой 14.1. Имеем:

$\overrightarrow{AB}\,(-4 - 3;\ 1 - (-2)) = \overrightarrow{AB}\,(-7;\ 3)$; $\overrightarrow{DC}\,(-2 - x;\ -3 - y)$. Отсюда

$$\begin{cases} -7 = -2 - x, \\ 3 = -3 - y; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 5, \\ y = -6. \end{cases}$$

Ответ: $D\,(5;\ -6)$. ■

1. Поясните, что называют координатами данного вектора.
2. Что можно сказать о координатах равных векторов?
3. Что можно сказать о векторах, соответствующие координаты которых равны?
4. Как найти координаты вектора, если известны координаты его начала и конца?
5. Как найти модуль вектора, если известны его координаты?

Практические задания

14.1. С помощью циркуля и линейки постройте точку, координаты которой равны координатам данного вектора $\vec{a}$ (рис. 14.3).

14.2. Отложите от начала координат векторы $\vec{a}\,(-3;\ 2)$, $\vec{b}\,(0;\ -2)$, $\vec{c}\,(4;\ 0)$.

14.3. Отложите от точки $M\,(-1;\ 2)$ векторы $\vec{a}\,(1;\ -3)$, $\vec{b}\,(-2;\ 0)$, $\vec{c}\,(0;\ -1)$.

Упражнения

14.4. Найдите координаты векторов, изображённых на рисунке 14.4.

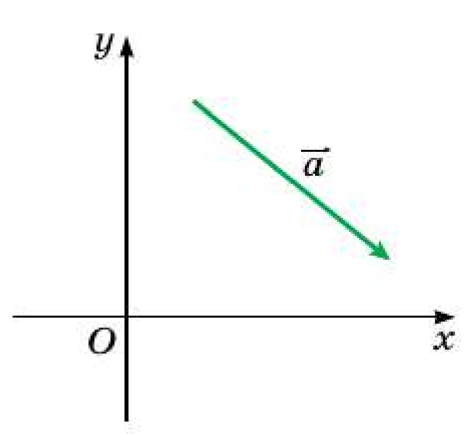


Рис. 14.3

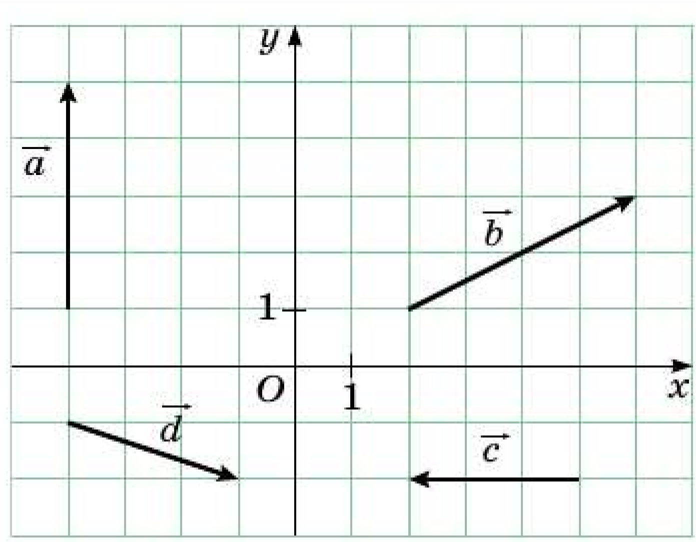


Рис. 14.4

14.5. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если:
1) $A\ (2;\ 3)$, $B\ (-1;\ 4)$;
2) $A\ (0;\ 0)$, $B\ (-2;\ -8)$;
3) $A\ (m;\ n)$, $B\ (p;\ k)$.

14.6. Даны точка $A\ (1;\ 3)$ и вектор $\vec{a}\,(-2;\ 1)$. Найдите координаты точки B такой, что $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$.

14.7. Даны точки $A\ (3;\ -7)$, $B\ (4;\ -5)$, $C\ (5;\ 8)$. Найдите координаты точки D такой, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

14.8. От точки $A\ (4;\ -3)$ отложен вектор $\vec{m}\,(-1;\ 8)$. Найдите координаты конца вектора.

14.9. Даны точки $A\ (3;\ -4)$, $B\ (-2;\ 7)$, $C\ (-4;\ 16)$, $D\ (1;\ 5)$. Докажите, что $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$.

14.10. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A\ (1;\ -5)$, $B\ (2;\ 3)$, $C\ (-3;\ 1)$, $D\ (-4;\ -7)$ является параллелограммом.

14.11. Среди векторов $\vec{a}\,(3;\ -4)$, $\vec{b}\,(-4;\ 2)$, $\vec{c}\,(3;\ \sqrt{11})$, $\vec{d}\,(-2;\ -4)$, $\vec{e}\,(-1;\ -2\sqrt{6})$, $\vec{f}\,(-4;\ 5)$ найдите те, которые имеют равные модули.

14.12. Даны точки $A\ (1;\ -4)$, $B\ (-2;\ 5)$, $C\ (1 + a;\ -4 + b)$, $D\ (-2 + a;\ 5 + b)$. Докажите, что $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$.

14.13. Модуль вектора $\vec{a}\,(x;\ -8)$ равен 10. Найдите x.

14.14. При каких значениях y модуль вектора $\vec{b}\,(12;\ y)$ равен 13?

14.15. Отрезок BM — медиана треугольника с вершинами $A\ (3;\ -5)$, $B\ (2;\ -3)$, $C\ (-1;\ 7)$. Найдите координаты и модуль вектора $\overrightarrow{BM}$.

14.16. Точки $A\ (-1;\ 3)$, $B\ (5;\ 0)$, $C\ (2;\ -3)$ являются вершинами треугольника ABC, медианы которого пересекаются в точке M. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$.

14.17. Точка F делит сторону BC прямоугольника $ABCD$ в отношении $1 : 2$, считая от вершины B (рис. 14.5). Найдите координаты векторов $\overrightarrow{AF}$ и $\overrightarrow{FD}$.

14.18. Точка E — середина стороны AC прямоугольника $OACD$ (рис. 14.6). Найдите координаты векторов $\overrightarrow{DE}$ и $\overrightarrow{EO}$.

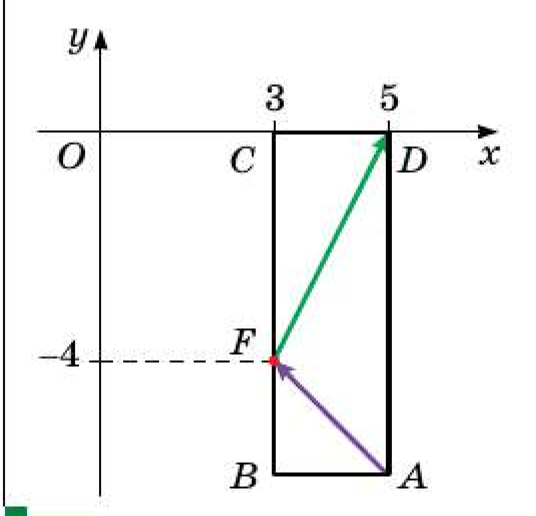


Рис. 14.5

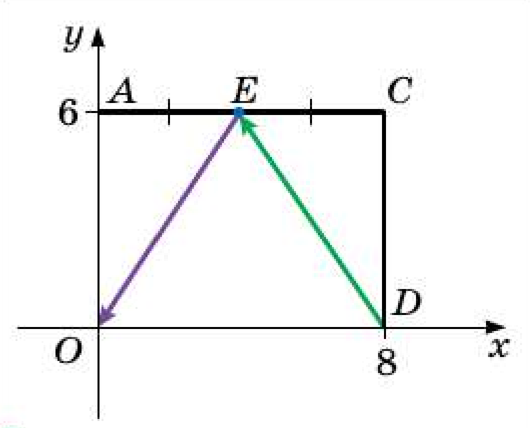


Рис. 14.6

14.19. Модуль вектора $\vec{a}$ равен 10. Его первая координата на 2 больше второй. Найдите координаты вектора $\vec{a}$.

14.20. Модуль вектора $\vec{c}$ равен 2, а его координаты равны. Найдите координаты вектора $\vec{c}$.

14.21. Точки A (2; 5) и B (7; 5) — вершины прямоугольника $ABCD$. Модуль вектора $\overrightarrow{BD}$ равен 13. Найдите координаты точек C и D.

14.22. Точки A (1; 2) и D (1; –6) — вершины прямоугольника $ABCD$. Модуль вектора $\overrightarrow{AC}$ равен 17. Найдите координаты вершин B и C.

§ 15 Сложение и вычитание векторов

Если тело переместилось из точки A в точку B, а затем из точки B в точку C, то суммарное перемещение из точки A в точку C естественно представить в виде вектора $\overrightarrow{AC}$, считая этот вектор суммой векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$, т. е. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (рис. 15.1).

Этот пример подсказывает, как ввести понятие суммы векторов, т. е. как сложить два данных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Отложим от произвольной точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}$. Далее от точки B отложим вектор $\overrightarrow{BC}$, равный вектору $\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ называют **суммой векторов** $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ (рис. 15.2) *и записывают* $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

Описанный алгоритм сложения двух векторов называют **правилом треугольника**.

Это название связано с тем, что если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то точки A, B и C являются вершинами треугольника (рис. 15.2).

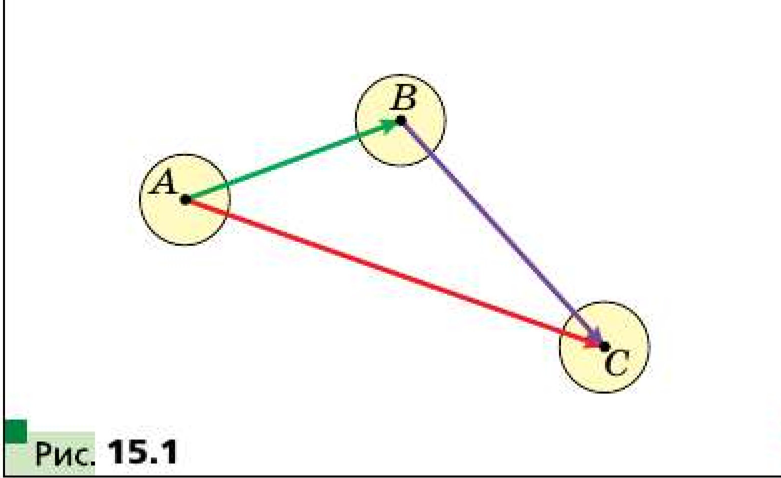


Рис. 15.1

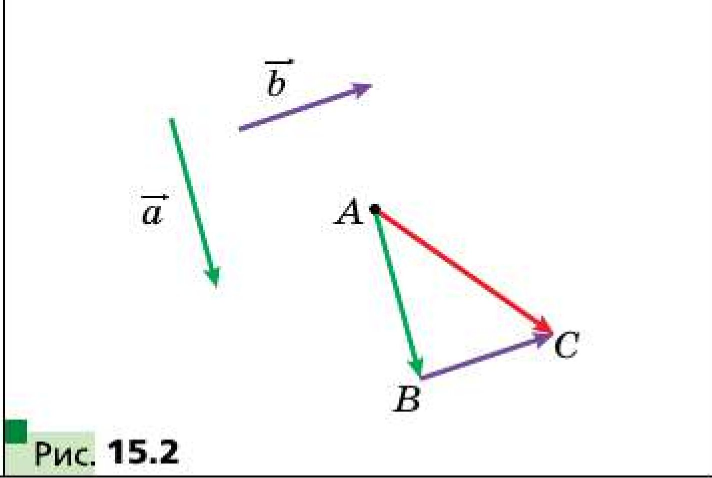


Рис. 15.2

По правилу треугольника можно складывать и коллинеарные векторы. На рисунке 15.3 вектор $\overrightarrow{AC}$ равен сумме коллинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Рис. 15.3

Итак, ***для любых трёх точек A, B и C выполняется равенство*** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, которое выражает **правило треугольника для сложения векторов.**

Теорема 15.1

Если координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно равны $(a_1;\ a_2)$ и $(b_1;\ b_2)$, то координаты вектора $\vec{a} + \vec{b}$ равны $(a_1 + b_1;\ a_2 + b_2)$.

Доказательство

Пусть точки $A\ (x_1;\ y_1)$, $B\ (x_2;\ y_2)$, $C\ (x_3;\ y_3)$ таковы, что $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$.

Найдём координаты векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\overrightarrow{AC}$: $\vec{a}\,(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$, $\vec{b}\ (x_3 - x_2;\ y_3 - y_2)$, $\overrightarrow{AC}\,(x_3 - x_1;\ y_3 - y_1)$.

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}\,(x_3 - x_1;\ y_3 - y_1) = \overrightarrow{AC}\,(x_3 - x_2 + x_2 - x_1;\ y_3 - y_2 + y_2 - y_1) = \overrightarrow{AC}\,(a_1 + b_1;\ a_2 + b_2).$$ ■

Замечание. Описывая правило треугольника для нахождения суммы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, мы отложили вектор $\vec{a}$ от произвольной точки. Если точку A заменить точкой A_1, то вместо вектора $\overrightarrow{AC}$, равного сумме векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, получим некоторый вектор $\overrightarrow{A_1C_1}$. Из теоремы 15.1 следует, что координаты векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{A_1C_1}$ равны $(a_1 + b_1;\ a_2 + b_2)$, следовательно, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$. Это означает, что сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не зависит от того, от какой точки отложен вектор $\vec{a}$.

Свойства сложения векторов аналогичны свойствам сложения чисел.

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ выполняются равенства:

1) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;

2) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (переместительное свойство);

3) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (сочетательное свойство).

Для доказательства этих свойств достаточно сравнить соответствующие координаты векторов, записанных в правой и левой частях равенств. Сделайте это самостоятельно.

Из переместительного и сочетательного свойств сложения векторов следует, что при сложении нескольких векторов можно менять местами слагаемые и расставлять скобки любым способом.

Используя правило треугольника, можно находить сумму трёх и более векторов. Например, найдём сумму векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$, изображённых на рисунке 15.4.

От произвольной точки A_1 отложим вектор $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{a}$; от точки A_2 отложим вектор $\overrightarrow{A_2A_3} = \vec{b}$; от точки A_3 отложим вектор $\overrightarrow{A_3A_4} = \vec{c}$; от точки A_4 отложим вектор $\overrightarrow{A_4A_5} = \vec{d}$. Найдём сумму $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{A_4A_5}$.

Имеем: $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{A_4A_5} = (\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3}) + \overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{A_4A_5} = \overrightarrow{A_1A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{A_4A_5} = (\overrightarrow{A_1A_3} + \overrightarrow{A_3A_4}) + \overrightarrow{A_4A_5} = \overrightarrow{A_1A_4} + \overrightarrow{A_4A_5} = \overrightarrow{A_1A_5}$.

Вообще, для любых точек A_1, A_2, A_3, ..., A_n выполняется равенство $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}$.

В физике часто приходится складывать векторы, отложенные от одной точки. Так, если к телу приложены силы $\vec{F_1}$ и $\vec{F_2}$ (рис. 15.5), то равнодействующая этих сил равна сумме $\vec{F_1} + \vec{F_2}$.

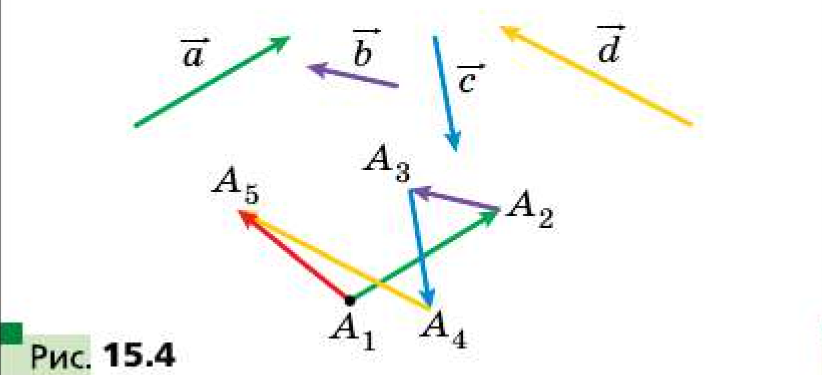


Рис. **15.4**

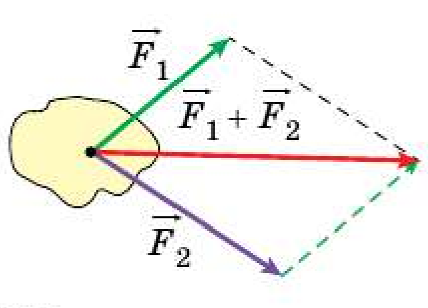


Рис. **15.5**

Для нахождения суммы двух неколлинеарных векторов, отложенных от одной точки, удобно пользоваться **правилом параллелограмма для сложения векторов**.

Пусть надо найти сумму неколлинеарных векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ (рис. 15.6). Отложим вектор $\overrightarrow{BC}$, равный вектору $\overrightarrow{AD}$. Тогда по правилу треугольника $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Так как векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ равны, то четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм с диагональю AC.

Приведённые соображения позволяют сформулировать правило параллелограмма для сложения неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Отложим от произвольной точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}$, и вектор $\overrightarrow{AD}$, равный вектору $\vec{b}$. Построим параллелограмм $ABCD$ (рис. 15.7). *Тогда искомая сумма $\vec{a}+\vec{b}$ равна вектору $\overrightarrow{AC}$.*

Определение

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют такой вектор $\vec{c}$, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$.

Пишут: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

Покажем, как построить вектор, равный разности данных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

От произвольной точки O отложим векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, соответственно равные векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 15.8). Тогда вектор $\overrightarrow{BA}$ равен разности $\vec{a} - \vec{b}$. Действительно, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA}$. Следовательно, по определению разности двух векторов $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$, т. е. $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{BA}$.

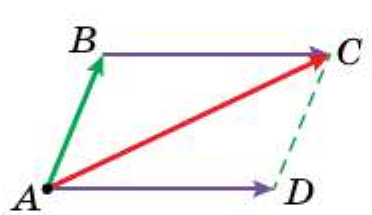


Рис. 15.6

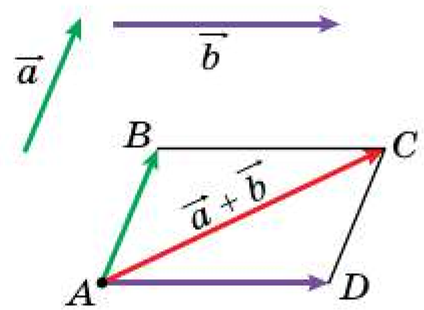


Рис. 15.7

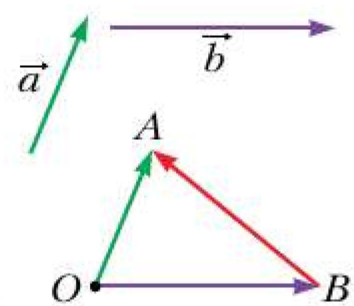


Рис. 15.8

На рисунке 15.8 векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ неколлинеарны. Однако описанный алгоритм применим и для нахождения разности коллинеарных векторов. На рисунке 15.9 вектор $\overrightarrow{BA}$ равен разности коллинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Рис. 15.9

Итак, ***для любых трёх точек O, A и B выполняется равенство*** $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$, которое выражает **правило нахождения разности двух векторов**, отложенных от одной точки.

Теорема 15.2

Если координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно равны $(a_1;\ a_2)$ и $(b_1;\ b_2)$, то координаты вектора $\vec{a} - \vec{b}$ равны $(a_1 - b_1;\ a_2 - b_2)$.

Докажите эту теорему самостоятельно.

Из этой теоремы следует, что для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ существует единственный вектор $\vec{c}$ такой, что $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$.

Определение

Два ненулевых вектора называют противоположными, если их модули равны и векторы противоположно направлены.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположны, то говорят, что вектор $\vec{a}$ **противоположен** вектору $\vec{b}$, а вектор $\vec{b}$ противоположный вектору $\vec{a}$.

Вектором, противоположным нулевому вектору, считают нулевой вектор.

Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначают так: $-\vec{a}$.

Из определения следует, что вектору $\overrightarrow{AB}$ противоположным является вектор $\overrightarrow{BA}$.

Тогда ***для любых точек A и B выполняется равенство*** $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Из правила треугольника следует, что

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}.$$

А из этого равенства следует, что если вектор $\overrightarrow{DC}$ имеет координаты $(a_1;\ a_2)$, то вектор $-\vec{a}$ имеет координаты $(-a_1;\ -a_2)$.

Теорема 15.3

Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется равенство

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

Для доказательства достаточно сравнить соответствующие координаты векторов, записанных в правой и левой частях равенства. Сделайте это самостоятельно.

Теорема 15.3 позволяет свести вычитание векторов к сложению: *чтобы из вектора* $\vec{a}$ *вычесть вектор* $\vec{b}$, *можно к вектору* $\vec{a}$ *прибавить вектор* $-\vec{b}$ (рис. 15.10).

Задача. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 15.11). Выразите векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{CB}$ через векторы $\overrightarrow{CO} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{BO} = \vec{b}$.

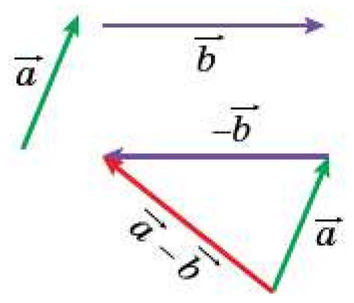


Рис. **15.10**

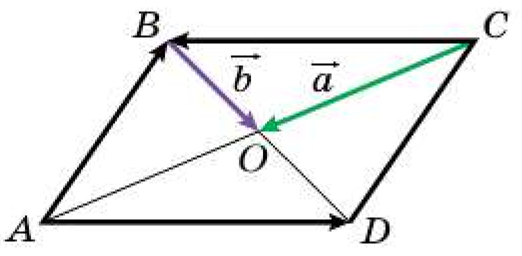


Рис. **15.11**

Решение. Так как точка O — середина отрезков BD и AC, то $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO} = \vec{b}$.

Имеем:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{BO} = -\vec{a} - \vec{b};$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a};$$

$$\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD} = \vec{a} - \vec{b}.$$ ■

1. Опишите правило треугольника для нахождения суммы векторов.
2. Какое равенство выражает правило треугольника для нахождения суммы векторов?
3. Чему равны координаты вектора, равного сумме двух данных векторов?
4. Запишите равенства, выражающие свойства сложения векторов.
5. Опишите правило параллелограмма для нахождения суммы двух векторов.
6. Какой вектор называют разностью двух векторов?
7. Какое равенство выражает правило нахождения разности двух векторов, отложенных от одной точки?
8. Чему равны координаты вектора, равного разности двух данных векторов?
9. Какие векторы называют противоположными?
10. Как вычитание векторов можно свести к сложению векторов?

15.1. С помощью правила треугольника постройте сумму векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, изображённых на рисунке 15.12.

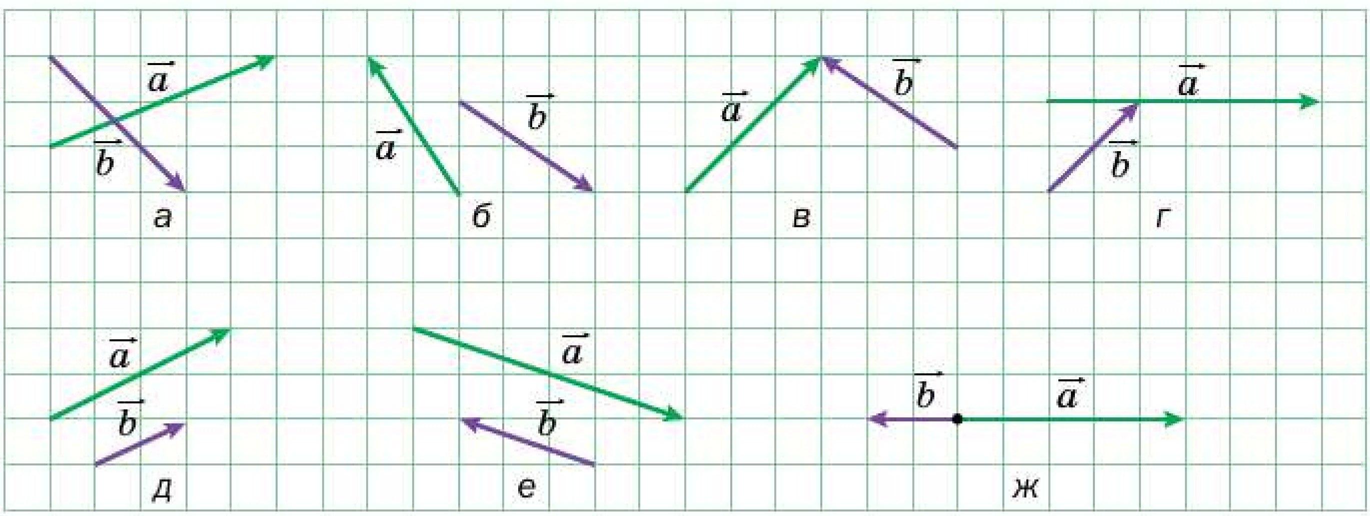


Рис. **15.12**

15.2. С помощью правила параллелограмма постройте сумму векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, изображённых на рисунке 15.12.

15.3. Для векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, изображённых на рисунке 15.12, постройте вектор $\vec{a} - \vec{b}$.

15.4. Начертите треугольник ABC. Отложите от точки A вектор, противоположный вектору: 1) $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{CA}$; 3) $\overrightarrow{BC}$.

15.5. Начертите параллелограмм $ABCD$. Постройте векторы $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$.

15.6. Начертите треугольник MNP. Постройте векторы $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP}$.

15.7. Начертите параллелограмм $ABCD$. Постройте векторы $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DB}$.

15.8. Начертите треугольник ABC. Постройте векторы $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA}$.

15.9. Отметьте четыре точки M, N, P, Q. Постройте вектор $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ}$.

15.10. Для векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, изображённых на рисунке 15.13, постройте вектор: 1) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; 2) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$; 3) $-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

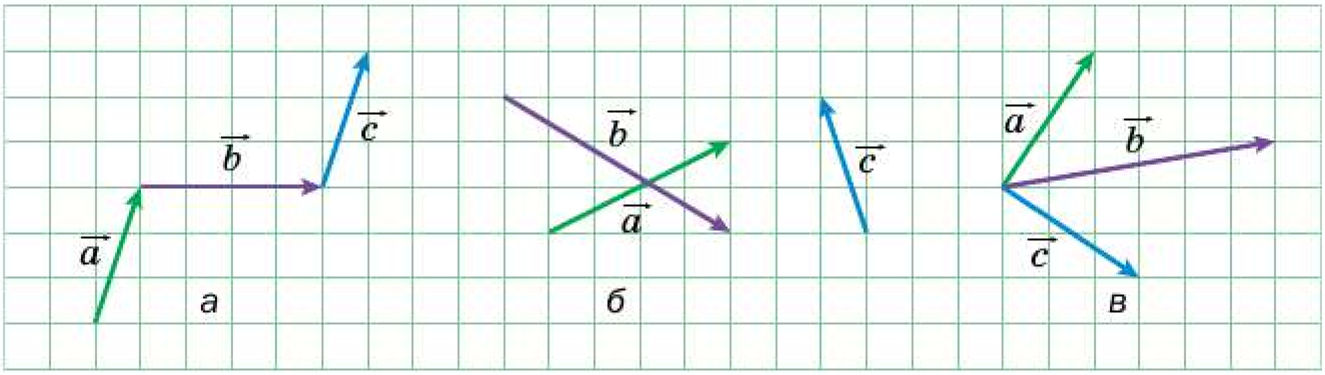


Рис. 15.13

15.11. Отложите от одной точки три вектора, модули которых равны, так, чтобы сумма двух из них была равна третьему вектору.

15.12. Отложите от одной точки три вектора, модули которых равны, так, чтобы их сумма была равна нуль-вектору.

15.13. Для точек A, B, C, D, изображённых на рисунке 15.14, постройте такой вектор $\vec{x}$, чтобы $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} + \vec{x} = \vec{0}$.

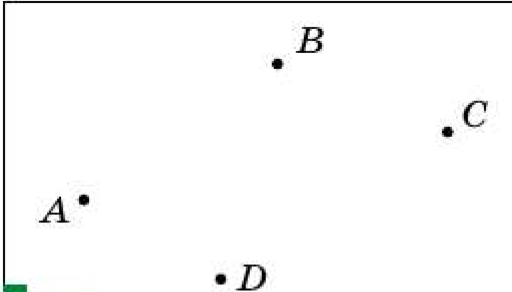


Рис. 15.14

15.14. Начертите треугольник ABC. Постройте такую точку X, чтобы:

1) $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{BX} + \overrightarrow{XC}$;

2) $\overrightarrow{BX} = \overrightarrow{XC} - \overrightarrow{XA}$.

Упражнения

15.15. Дан треугольник ABC. Выразите вектор $\overrightarrow{BC}$ через векторы:

1) $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

15.16. Дан параллелограмм $ABCD$. Выразите векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA}$ через векторы $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$.

15.17. Дан параллелограмм $ABCD$. Выразите векторы $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BC}$ через векторы $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DA} = \vec{b}$.

15.18. Дан параллелограмм $ABCD$. Выразите векторы $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DA}$ через векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$.

15.19. Докажите, что для любых точек A, B, C, D выполняется равенство:

1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$;

2) $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}$;

3) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$.

15.20. Докажите, что для любых точек A, B, C, D выполняется равенство:

1) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}$;

2) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$;

3) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DC}$.

15.21. Точки M и N — середины соответственно сторон BA и BC треугольника ABC. Выразите векторы $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NB}$ через векторы $\overrightarrow{BM} = \vec{m}$ и $\overrightarrow{BN} = \vec{n}$.

15.22. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Докажите, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

15.23. Даны четырёхугольник $ABCD$ и некоторая точка O. Известно, что $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}$. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

15.24. Даны четырёхугольник $ABCD$ и некоторая точка O. Известно, что $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

15.25. Даны векторы $\vec{a}\,(4; -5)$ и $\vec{b}\,(-1; 7)$. Найдите:

1) координаты векторов $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$;

2) $|\vec{a} + \vec{b}|$, $|\vec{a} - \vec{b}|$.

15.26. Даны точки $A\,(1; -3)$, $B\,(4; 5)$, $C\,(-2; -1)$, $D\,(3; 0)$. Найдите:

1) координаты векторов $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$;

2) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}|$, $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}|$.

15.27. Сумма векторов $\vec{a}\,(5; -3)$ и $\vec{b}\,(x; 4)$ равна вектору $\vec{c}\,(2; y)$. Найдите x и y.

15.28. Сумма векторов $\vec{a}\,(x; -1)$ и $\vec{b}\,(2; y)$ равна вектору $\vec{c}\,(-3; 4)$. Найдите x и y.

15.29. Дан вектор $\overrightarrow{MN}\,(3; -5)$. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{NM}$.

15.30. Сторона равностороннего треугольника ABC равна 3 см. Найдите $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|$.

15.31. Катет равнобедренного прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) равен 4 см. Найдите $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}|$.

15.32. Даны точки $N\,(3; -5)$ и $F\,(4; 1)$. Найдите $|\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OF}|$ и $|\overrightarrow{FO} + \overrightarrow{ON}|$, где O — произвольная точка.

15.33. Докажите, что для любых n точек A_1, A_2, ..., A_n выполняется равенство $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \ldots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} + \overrightarrow{A_nA_1} = \vec{0}$.

15.34. Выразите вектор $\overrightarrow{AB}$ через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ (рис. 15.15).

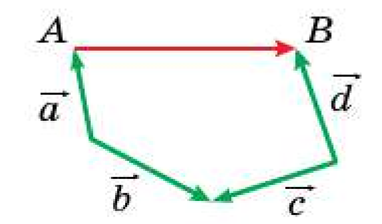


Рис. **15.15**

15.35. В параллелограмме $ABCD$ точки M, N, K — середины соответственно сторон AB, BC и CD. Выразите векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{AD}$ через векторы $\overrightarrow{MN} = \vec{m}$, $\overrightarrow{KN} = \vec{n}$.

15.36. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Выразите векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{AD}$ через векторы $\overrightarrow{DO} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{b}$.

15.37. Дан четырёхугольник $ABCD$. Докажите, что $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{DA}$, где M — произвольная точка.

15.38. Четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм. Докажите, что $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}$, где M — произвольная точка.

15.39. Четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм. Докажите, что:
1) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{DA} = \vec{0}$.

15.40. В треугольнике ABC проведена медиана BM. Докажите, что:
1) $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$; 2) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$.

15.41. Пловец со скоростью $\sqrt{3}$ м/с относительно воды переплывает речку в направлении, перпендикулярном параллельным берегам. Скорость течения равна 1 м/с. Под каким углом к направлению, перпендикулярному берегам, перемещается пловец?

15.42. Докажите, что для неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется неравенство $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

15.43. Докажите, что для неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется неравенство $|\vec{a} - \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

15.44. Для ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется равенство $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$. Докажите, что $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.

15.45. Для ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется равенство $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$. Докажите, что $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

15.46. Может ли быть нулевым вектором сумма трёх векторов, модули которых равны:
1) 5; 2; 3; 2) 4; 6; 3; 3) 8; 9; 18?

15.47. Докажите, что для параллелограмма $ABCD$ и произвольной точки X выполняется равенство $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XD}$.

15.48. Гребец из точки A переправляется через реку шириной 240 м с постоянной собственной скоростью, направляя нос лодки перпендикулярно противоположному берегу. Через 4 мин лодка причаливает к противоположному берегу в точке C, расположенной ниже по течению от точки A на 48 м. Определите скорость течения и скорость лодки относительно берегов реки.

15.49. Катер из точки A переправляется через реку шириной 300 м с постоянной собственной скоростью. Через 100 с катер причаливает к противоположному берегу в точке B. Прямая AB перпендикулярна параллельным берегам реки. Скорость течения реки $\sqrt{3}$ м/с. Под каким углом к берегу реки был направлен нос катера?

15.50. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Известно, что $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

15.51. Векторы $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{EF}$ попарно неколлинеарны, причём $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{EF}=\vec{0}$. Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны отрезкам MN, PQ и EF.

15.52. Даны две точки A и B. Найдите геометрическое место точек X таких, что $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BX}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

15.53. Даны две точки A и B. Найдите геометрическое место точек X таких, что $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BX}\right|=\left|\overrightarrow{BX}\right|$.

15.54. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M. Докажите, что $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

15.55. Докажите, что для любых n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ существует единственная точка M[1] такая, что $\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+\ldots+\overrightarrow{MA_n}=\vec{0}$.

15.56. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены параллелограммы AA_1B_1B, BB_2C_1C, CC_2A_2A. Прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 попарно непараллельны. Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны отрезкам A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2.

[1] Точку M называют центроидом системы точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

§ 16 Умножение вектора на число. Применение векторов к решению задач

Пусть дан ненулевой вектор $\vec{a}$. На рисунке 16.1 изображены вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}+\vec{a}$, и вектор $\overrightarrow{CD}$, равный вектору $(-\vec{a})+(-\vec{a})+(-\vec{a})$. Очевидно, что

$$|\overrightarrow{AB}| = 2|\vec{a}| \text{ и } \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \vec{a},$$
$$|\overrightarrow{CD}| = 3|\vec{a}| \text{ и } \overrightarrow{CD} \uparrow\downarrow \vec{a}.$$

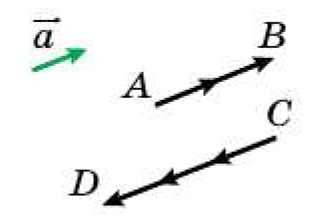


Рис. 16.1

Вектор $\overrightarrow{AB}$ обозначают $2\vec{a}$ и считают, что он получен в результате **умножения вектора $\vec{a}$ на число** 2. Аналогично можно считать, что вектор $\overrightarrow{CD}$ получен в результате умножения вектора $\vec{a}$ на число -3, и принять обозначение $\overrightarrow{CD} = -3\vec{a}$.

Этот пример подсказывает, как ввести понятие «умножение вектора на число».

Определение

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ и числа k, отличного от нуля, называют такой вектор $\vec{b}$, что:

1) $|\vec{b}| = |k||\vec{a}|$;

2) если $k > 0$, то $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$; если $k < 0$, то $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$.

Пишут: $\vec{b} = k\vec{a}$.

Если $\vec{a} = \vec{0}$ или $k = 0$, то считают, что $k\vec{a} = \vec{0}$.

На рисунке 16.2 изображены векторы $\vec{a}$, $-2\vec{a}$, $\frac{2}{3}\vec{a}$, $\sqrt{3}\,\vec{a}$.

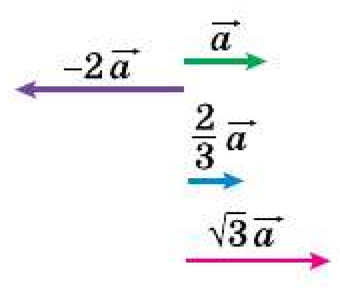


Рис. 16.2

Из определения следует, что

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a},$$
$$-1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}.$$

Также из определения следует, что

если $\vec{b} = k\vec{a}$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

А если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то можно ли представить вектор $\vec{b}$ в виде произведения $k\vec{a}$? Ответ даёт следующая теорема.

Теорема 16.1

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{a} \neq \vec{0}$, то существует такое число k, что $\vec{b} = k\vec{a}$.

Доказательство

Если $\vec{b} = \vec{0}$, то при $k = 0$ получаем, что $\vec{b} = k\vec{a}$.

Если $\vec{b} \neq \vec{0}$, то или $\vec{a} \upuparrows \vec{b}$, или $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

1) Пусть $\vec{a} \upuparrows \vec{b}$. Рассмотрим вектор $\vec{c} = k\vec{a}$, где $k = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. Так как $k > 0$, то $\vec{c} \upuparrows \vec{a}$, следовательно, $\vec{c} \upuparrows \vec{b}$. Кроме того, $|\vec{c}| = k|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Таким образом, векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ сонаправлены и их модули равны. Отсюда $\vec{b} = \vec{c} = k\vec{a}$.

2) Пусть $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. Рассмотрим вектор $\vec{c} = k\vec{a}$, где $k = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. Для этого случая завершите доказательство самостоятельно. ■

Теорема 16.2

Если вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(a_1; a_2)$, то вектор $k\vec{a}$ имеет координаты $(ka_1; ka_2)$.

Доказательство

Если $\vec{a} = \vec{0}$ или $k = 0$, то утверждение теоремы очевидно.

Пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $k \neq 0$. Рассмотрим вектор $\vec{b}\,(ka_1;\ ka_2)$. Покажем, что $\vec{b} = k\vec{a}$.

Имеем: $|\vec{b}| = \sqrt{(ka_1)^2 + (ka_2)^2} = |k|\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = |k||\vec{a}|$.

Отложим от начала координат векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, равные соответственно векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Так как прямая OA проходит через начало координат, то её уравнение имеет вид $ax + by = 0$.

Этой прямой принадлежит точка $A\,(a_1; a_2)$. Тогда

$$aa_1 + ba_2 = 0. \text{ Отсюда } a\,(ka_1) + b\,(ka_2) = 0.$$

Следовательно, точка $B\,(ka_1;\ ka_2)$ также принадлежит прямой OA, поэтому векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ коллинеарны, т. е. $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

При $k > 0$ числа a_1 и ka_1 имеют одинаковые знаки (или оба равны нулю). Таким же свойством обладают числа a_2 и ka_2. Следовательно, при $k > 0$ точки A и B лежат в одной координатной четверти (или на одном координатном луче), поэтому векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ сонаправлены (рис. 16.3), т. е. $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. При $k < 0$ векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ являются противоположно направленными, т. е. $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Итак, мы получили, что $\vec{b} = k\vec{a}$. ■

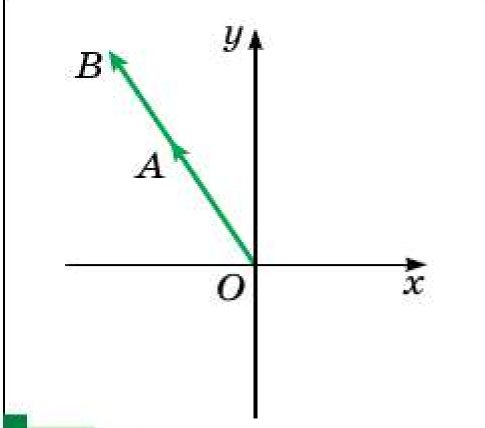


Рис. 16.3

Следствие 1

Векторы $\vec{a}\,(a_1;\ a_2)$ и $\vec{b}\,(ka_1;\ ka_2)$ коллинеарны.

Следствие 2

Если векторы $\vec{a}\,(a_1;\ a_2)$ и $\vec{b}\,(b_1;\ b_2)$ коллинеарны, причём $\vec{a} \neq \vec{0}$, то существует такое число k, что $b_1 = ka_1$ и $b_2 = ka_2$.

С помощью теоремы 16.2 можно доказать такие свойства умножения вектора на число.

Для любых чисел k, m и любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ справедливы равенства:

$(km)\vec{a} = k(m\vec{a})$ — сочетательное свойство;

$(k + m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$ — первое распределительное свойство;

$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ — второе распределительное свойство.

Для доказательства этих свойств достаточно сравнить соответствующие координаты векторов, записанных в правых и левых частях равенств. Сделайте это самостоятельно.

Эти свойства позволяют преобразовывать выражения, содержащие суммы векторов, разности векторов и произведения векторов на число аналогично тому, как мы преобразовываем алгебраические выражения. Например, $2(\vec{a} - 3\vec{b}) + 3(\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} - 6\vec{b} + 3\vec{a} + 3\vec{b} = 5\vec{a} - 3\vec{b}$.

Теорема 16.3

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — неколлинеарные векторы. Тогда для любого вектора $\vec{c}$ существует единственная пара чисел $(x;\ y)$ такая, что

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}.$$

Доказательство

Сначала покажем, что такая пара $(x;\ y)$ существует.

Пусть $\vec{c} \parallel \vec{a}$. Тогда существует такое число k, что $\vec{c} = k\vec{a}$ (теорема 16.1). Отсюда $\vec{c} = k\vec{a} + 0\vec{b}$. Следовательно, $(k;\ 0)$ — искомая пара чисел.

Пусть $\vec{c} \parallel \vec{b}$. Рассуждая аналогично, получаем, что $\vec{c} = 0\vec{a} + m\vec{b}$, где m — некоторое число.

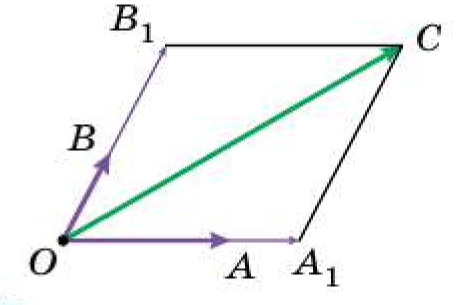


Рис. **16.4**

Пусть вектор $\vec{c}$ не коллинеарен ни вектору $\vec{a}$, ни вектору $\vec{b}$. Отложим от произвольной точки O векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$, соответственно равные векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Через точку C проведём прямые, параллельные прямым OA и OB. Получим параллелограмм OB_1CA_1 (рис. 16.4). Тогда по правилу параллелограмма $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1}$.

Векторы $\overrightarrow{OB_1}$ и $\overrightarrow{OB}$ коллинеарны, векторы $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{OA}$ также коллинеарны. Следовательно, существуют такие числа x и y, что $\overrightarrow{OA_1} = x\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB_1} = y\overrightarrow{OB}$. Отсюда $\overrightarrow{OC} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$, т. е.

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}.$$

Покажем, что пара $(x; y)$ — единственная. Пусть существует ещё одна пара $(x_1; y_1)$ такая, что $\vec{c} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b}$. Тогда

$$\vec{0} = \vec{c} - \vec{c} = (x\vec{a} + y\vec{b}) - (x_1\vec{a} + y_1\vec{b}) = (x - x_1)\vec{a} + (y - y_1)\vec{b}.$$

Отсюда $(x - x_1)\vec{a} + (y - y_1)\vec{b} = \vec{0}$.

Пусть $x \neq x_1$. Тогда $\vec{a} = -\dfrac{y - y_1}{x - x_1}\vec{b}$, т. е. $\vec{a} \parallel \vec{b}$, что противоречит условию теоремы. Следовательно, $x = x_1$. Аналогично можно доказать, что $y = y_1$. ■

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны и для вектора $\vec{c}$ найдена пара действительных чисел $(x; y)$ такая, что $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, то говорят, что вектор $\vec{c}$ **разложен по векторам** $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Упорядоченную пару $(\vec{a}; \vec{b})$ неколлинеарных векторов называют **базисом.** Если для вектора $\vec{c}$ выполняется равенство $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, то говорят, что вектор $\vec{c}$ **разложен по базису** $(\vec{a}; \vec{b})$. Упорядоченную пару $(x; y)$ называют **координатами вектора** $\vec{c}$ **в базисе** $(\vec{a}; \vec{b})$.

Задача 1. Докажите, что если $\overrightarrow{OA} = k\overrightarrow{OB}$, то точки O, A и B лежат на одной прямой.

Решение. Из условия следует, что векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ коллинеарны. Кроме того, эти векторы отложены от одной точки O. Следовательно, точки O, A и B лежат на одной прямой. ■

Задача 2. Пусть M — такая точка отрезка AB, что $\frac{AM}{MB} = \frac{m}{n}$ (рис. 16.5). Докажите, что для любой точки X выполняется равенство:

$$\boxed{\overrightarrow{XM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{XA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB}} \qquad (1)$$

Решение. Имеем: $\overrightarrow{XM} - \overrightarrow{XA} = \overrightarrow{AM}$.

Поскольку $AM = \frac{m}{m+n}AB$, то $\overrightarrow{AM} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$.

Запишем $\overrightarrow{XM} - \overrightarrow{XA} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$.

Поскольку $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XA}$, то имеем:

$$\overrightarrow{XM} - \overrightarrow{XA} = \frac{m}{m+n}(\overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XA});$$

$$\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XA} - \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB};$$

$$\overrightarrow{XM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{XA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB}. \ \blacksquare$$

Если $m = n$, то точка M является серединой отрезка AB. Тогда формула (1) принимает вид

$$\boxed{\overrightarrow{XM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB})} \qquad (2)$$

Свойства векторов широко используются при решении задач и доказательстве теорем. Продемонстрируем это на примерах.

Задача 3. Докажите свойство медиан треугольника: *медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении* 2 : 1, *считая от вершины*.

Решение. Пусть медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке M (рис. 16.6).

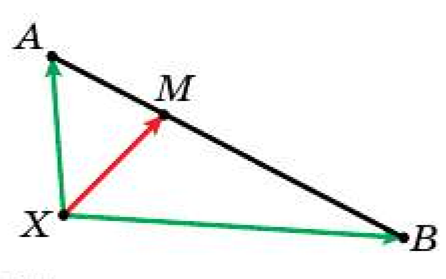


Рис. 16.5

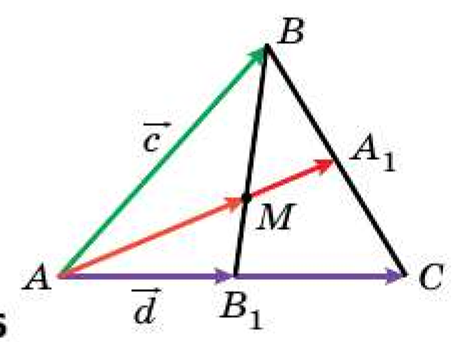


Рис. 16.6

Обозначим $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AB_1} = \vec{d}$. Векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ неколлинеарны. Они образуют базис $(\vec{c}; \vec{d})$.

Пусть $\frac{BM}{MB_1} = \alpha$. Записав это отношение так: $\frac{BM}{MB_1} = \frac{\alpha}{1}$, можно с помощью формулы (1) разложить вектор $\overrightarrow{AM}$ по базису $(\vec{c}; \vec{d})$. Имеем:

$$\boxed{\overrightarrow{AM} = \frac{1}{\alpha+1}\vec{c} + \frac{\alpha}{\alpha+1}\vec{d}} \quad (3)$$

Применяя формулу (2), запишем:

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2} \cdot 2\vec{d} = \frac{1}{2}\vec{c} + \vec{d}.$$

Так как векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AA_1}$ коллинеарны, то существует такое число $k \neq 0$, что $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AA_1}$. Отсюда

$$\boxed{\overrightarrow{AM} = \frac{k}{2}\vec{c} + k\vec{d}} \quad (4)$$

Из равенств (3) и (4) в силу единственности разложения вектора по базису получаем: $\begin{cases} \frac{1}{\alpha+1} = \frac{k}{2}, \\ \frac{\alpha}{\alpha+1} = k. \end{cases}$ Отсюда $\alpha = 2$.

Следовательно, $\frac{BM}{MB_1} = 2$, т. е. мы показали, что медиана AA_1 делит медиану BB_1 в отношении $2 : 1$, считая от вершины B. Дальнейшее доказательство вам известно. ■

Задача 4. Докажите, что середины оснований трапеции и точка пересечения продолжений её боковых сторон лежат на одной прямой.

Решение. Пусть точки M и N — середины оснований BC и AD трапеции $ABCD$, O — точка пересечения прямых AB и CD (рис. 16.7).

Применяя ключевую задачу 2, запишем: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD})$.

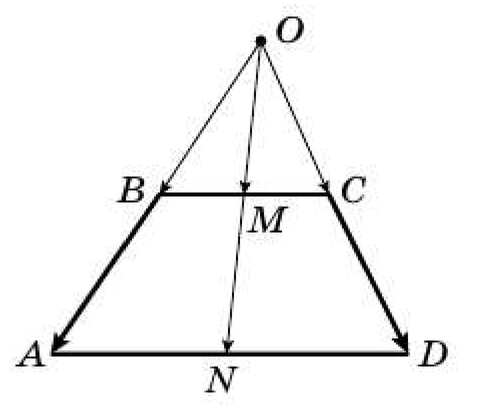


Рис. 16.7

Поскольку векторы $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OA}$ коллинеарны, а также векторы $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$ коллинеарны, то $\overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OC} = k_1\overrightarrow{OD}$, где k и k_1 — некоторые числа.

Так как $\triangle BOC \sim \triangle AOD$, то $\dfrac{OB}{OA} = \dfrac{OC}{OD}$. Следовательно, $k = k_1$.

Имеем: $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \dfrac{1}{2}(k\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OD}) = k \cdot \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) = k\overrightarrow{ON}$. Из ключевой задачи 1 следует, что точки O, M, N лежат на одной прямой. ■

Также с помощью векторов можно доказать, что прямой ON принадлежит точка пересечения диагоналей трапеции. Сделайте это самостоятельно.

Задача 5. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC и X — произвольная точка (рис. 16.8). Докажите, что $\overrightarrow{XM} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC})$.

Решение. Пусть K — середина отрезка AC. Имеем: $BM : MK = 2 : 1$. Тогда, используя ключевую задачу 2, можно записать: $\overrightarrow{XM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{XB} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{XK} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{XB} + \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC}) = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC})$. ■

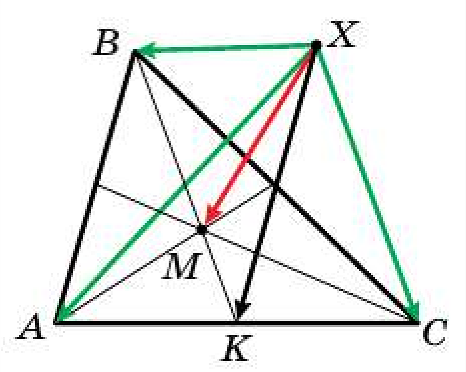


Рис. 16.8

Докажем векторное равенство, связывающее две замечательные[1] точки треугольника.

Задача 6. Докажите, что если точка H — ортоцентр треугольника ABC, а точка O — центр его описанной окружности, то

$$\boxed{\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}} \qquad (5)$$

Решение. Для прямоугольного треугольника равенство (5) очевидно.

Пусть теперь треугольник ABC не является прямоугольным. Опустим из точки O перпендикуляр OK на сторону AC треугольника

[1] О замечательных точках треугольника см. «Геометрия. 8 класс», § 17.

ABC (рис. 16.9). В курсе геометрии 8 класса было доказано, что $BH = 2OK$.

На луче OK отметим точку P такую, что $OK = KP$. Тогда $BH = OP$. Поскольку $BH \parallel OP$, то четырёхугольник $HBOP$ — параллелограмм.

По правилу параллелограмма $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OP}$.

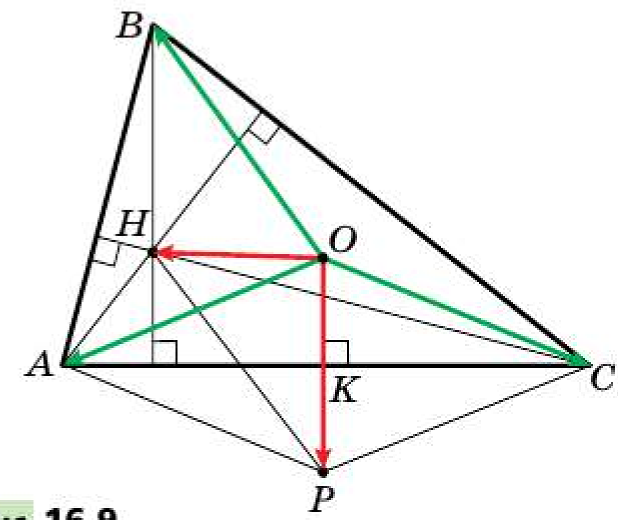


Рис. **16.9**

Так как точка K является серединой отрезка AC, то в четырёхугольнике $AOCP$ диагонали точкой пересечения делятся пополам. Следовательно, этот четырёхугольник — параллелограмм. Отсюда $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$.

Имеем: $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$. ■

Обратимся к векторному равенству $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC})$, где M — точка пересечения медиан треугольника ABC. Так как X — произвольная точка, то равенство остаётся верным, если в качестве точки X выбрать точку O — центр описанной окружности треугольника ABC.

Имеем: $3\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Принимая во внимание равенство (5), получаем: $3\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH}$.

Это равенство означает, что точки O, M и H лежат на одной прямой. Как вы знаете из курса геометрии 8 класса, эту прямую называют прямой Эйлера.

?

1. Что называют произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ и числа $k \neq 0$?

2. Что можно сказать о ненулевых векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{b} = k\vec{a}$, где k — некоторое число?

3. Известно, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, причём $\vec{a} \neq \vec{0}$. Как можно выразить вектор $\vec{b}$ через вектор $\vec{a}$?

4. Вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(a_1; a_2)$. Чему равны координаты вектора $k\vec{a}$?

5. Что можно сказать о векторах, координаты которых равны $(a_1; a_2)$ и $(ka_1; ka_2)$?

6. Запишите сочетательное и распределительные свойства умножения вектора на число.

Практические задания

16.1. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 16.10). Постройте вектор: 1) $2\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}$; 3) $\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$; 4) $-\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$.

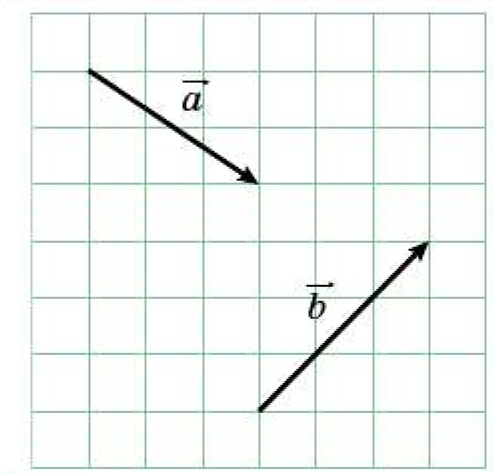


Рис. **16.10**

16.2. Постройте два неколлинеарных вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$. Отметьте произвольную точку O. От точки O отложите векторы: 1) $3\vec{x}+\vec{y}$; 2) $\vec{x}+2\vec{y}$; 3) $-\frac{1}{2}\vec{x}+3\vec{y}$; 4) $-2\vec{x}-\frac{1}{3}\vec{y}$.

16.3. Отметьте на плоскости три точки A, B и C такие, что: 1) $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; 4) $\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

16.4. Начертите треугольник ABC. Отметьте точку M — середину стороны AC.

1) От точки M отложите вектор, равный вектору $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

2) От точки B отложите вектор, равный вектору $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

16.5. Начертите трапецию $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Отметьте точку M — середину стороны AB. От точки M отложите вектор, равный вектору $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

16.6. Начертите треугольник ABC. Постройте вектор, равный вектору $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, так, чтобы его начало принадлежало стороне AB, а конец — стороне BC.

Упражнения

16.7. Найдите модули векторов $3\vec{m}$ и $-\frac{1}{2}\vec{m}$, если $|\vec{m}|=4$.

16.8. Какой из векторов, $3\vec{a}$ или $-\frac{1}{3}\vec{a}$, сонаправлен с вектором $\vec{a}$, если $\vec{a} \uparrow \vec{0}$?

16.9. Являются ли ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправленными или противоположно направленными, если: 1) $\vec{b} = 2\vec{a}$; 2) $\vec{a} = -\frac{1}{3}\vec{b}$; 3) $\vec{b} = \sqrt{2}\,\vec{a}$? Найдите отношение $\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$.

16.10. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Выразите: 1) вектор $\overrightarrow{AO}$ через вектор $\overrightarrow{AC}$; 2) вектор $\overrightarrow{BD}$ через вектор $\overrightarrow{BO}$; 3) вектор $\overrightarrow{CO}$ через вектор $\overrightarrow{AC}$.

16.11. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Выразите вектор $\overrightarrow{AO}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

16.12. В параллелограмме $ABCD$ на диагонали AC отметили точку M так, что $AM : MC = 1 : 3$. Выразите вектор $\overrightarrow{MC}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, где $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

16.13. В параллелограмме $ABCD$ точка M — середина стороны BC, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Выразите векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MD}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

16.14. В треугольнике ABC точки M и N — середины сторон AB и BC соответственно. Выразите: 1) вектор $\overrightarrow{MN}$ через вектор $\overrightarrow{CA}$; 2) вектор $\overrightarrow{AC}$ через вектор $\overrightarrow{MN}$.

16.15. На отрезке AB длиной 18 см отметили точку C так, что $BC = 6$ см. Выразите: 1) вектор $\overrightarrow{AB}$ через вектор $\overrightarrow{AC}$; 2) вектор $\overrightarrow{BC}$ через вектор $\overrightarrow{AB}$; 3) вектор $\overrightarrow{AC}$ через вектор $\overrightarrow{BC}$.

16.16. Дан вектор $\vec{a}(-4; 2)$. Найдите координаты и модули векторов $3\vec{a}$, $-\frac{1}{2}\vec{a}$, $\frac{3}{2}\vec{a}$.

16.17. Дан вектор $\vec{b}(-6; 12)$. Найдите координаты и модули векторов $2\vec{b}$, $-\frac{1}{6}\vec{b}$, $\frac{2}{3}\vec{b}$.

16.18. Дан вектор $\vec{a}(3; -2)$. Какие из векторов $\vec{b}(-3; -2)$, $\vec{c}(-6; 4)$, $\vec{d}\left(\frac{3}{2}; -1\right)$, $\vec{e}\left(-1; -\frac{2}{3}\right)$, $\vec{f}(-3\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$ коллинеарны вектору $\vec{a}$?

16.19. Даны векторы $\vec{a}(3; -3)$ и $\vec{b}(-16; 8)$. Найдите координаты вектора: 1) $2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$; 2) $-\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$; 3) $\vec{a} - \frac{5}{8}\vec{b}$.

16.20. Даны векторы $\vec{m}(-2; 4)$ и $\vec{n}(3; -1)$. Найдите координаты вектора: 1) $3\vec{m} + 2\vec{n}$; 2) $-\frac{1}{2}\vec{m} + 2\vec{n}$; 3) $\vec{m} - 3\vec{n}$.

16.21. На сторонах AB и AC треугольника ABC отметили соответственно точки M и N так, что $AM : MB = AN : NC = 1 : 2$. Выразите вектор $\overrightarrow{MN}$ через вектор $\overrightarrow{CB}$.

16.22. Точки O, A и B лежат на одной прямой. Докажите, что существует такое число k, что $\overrightarrow{OA} = k\overrightarrow{OB}$.

16.23. На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ отметили соответственно точки M и N так, что $AM : MB = 1 : 2$, $BN : NC = 2 : 1$. Разложите вектор $\overrightarrow{NM}$ по базису $(\vec{a}; \vec{b})$, где $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

16.24. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ отметили соответственно точки E и F так, что $BE : EC = 3 : 1$, $CF : FD = 1 : 3$. Разложите вектор $\overrightarrow{EF}$ по базису $(\vec{a}; \vec{b})$, где $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

16.25. Среди векторов $\vec{a}(1; -2)$, $\vec{b}(-3; -6)$, $\vec{c}(-4; 8)$, $\vec{d}(-1; -2)$ укажите пары коллинеарных векторов.

16.26. Докажите, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны, если $A(1; 1)$, $B(3; -2)$, $C(-1; 3)$, $D(5; -6)$.

16.27. Даны векторы $\vec{m}(4; -6)$, $\vec{n}\left(-1; \frac{3}{2}\right)$, $\vec{k}\left(3; -\frac{9}{2}\right)$. Укажите пары сонаправленных и противоположно направленных векторов.

16.28. Найдите значения x, при которых векторы $\vec{a}(1; x)$ и $\vec{b}\left(\frac{x}{4}; 4\right)$ коллинеарны.

16.29. При каких значениях y векторы $\vec{a}(2; 3)$ и $\vec{b}(-1; y)$ коллинеарны?

16.30. Дан вектор $\vec{b}(-3; 1)$. Найдите координаты вектора, коллинеарного вектору $\vec{n}$, модуль которого в два раза больше модуля вектора $\vec{b}$. Сколько решений имеет задача?

16.31. Найдите координаты вектора $\vec{m}$, противоположно направленного вектору $\vec{n}(5; -12)$, если $|\vec{m}| = 39$.

16.32. Найдите координаты вектора $\vec{a}$, сонаправленного с вектором $\vec{b}(-9; 12)$, если $|\vec{a}| = 5$.

16.33. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ с вершинами $A(-1; 2)$, $B(3; 5)$, $C(14; 6)$, $D(2; -3)$ является трапецией.

16.34. Докажите, что точки $A(-1; 3)$, $B(4; -7)$, $D(-2; 5)$ лежат на одной прямой.

16.35. Даны векторы $\vec{a}(1; -4)$, $\vec{b}(0; 3)$, $\vec{c}(2; -17)$. Найдите такие числа x и y, что $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

16.36. На стороне AC треугольника ABC отметили точку M так, что $AM : MC = 2 : 3$. Докажите, что $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$.

16.37. На стороне BC треугольника ABC отметили точку D так, что $BD : DC = 1 : 2$. Докажите, что $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

◆◆

16.38. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. На стороне BC отметили точку K так, что $BK : KC = 2 : 3$. Разложите вектор $\overrightarrow{OK}$ по базису $(\vec{a}; \vec{b})$, где $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

16.39. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O так, что $AO : OC = 1 : 2$, $BO : OD = 4 : 3$. Разложите векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA}$ по базису $(\vec{a}; \vec{b})$, где $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

16.40. На сторонах AB и BC треугольника ABC отметили соответственно точки K и F так, что $AK : KB = 1 : 2$ и $BF : FC = 2 : 3$. Разложите векторы $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{KC}$, $\overrightarrow{KF}$ по базису $(\vec{m}; \vec{n})$, где $\overrightarrow{BK} = \vec{m}$, $\overrightarrow{CF} = \vec{n}$.

16.41. На сторонах AC и BC треугольника ABC отметили соответственно точки M и N так, что $AM : MC = 1 : 3$ и $BN : NC = 4 : 3$. Разложите векторы $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{NM}$ по базису $(\vec{k}; \vec{p})$, где $\overrightarrow{BN} = \vec{k}$, $\overrightarrow{AM} = \vec{p}$.

16.42. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M. Разложите вектор $\overrightarrow{BM}$ по базису: 1) $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC})$; 2) $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{CA})$.

16.43. С помощью векторов докажите теорему о средней линии треугольника.

16.44. С помощью векторов докажите теорему о средней линии трапеции.

16.45. Пусть точки M и N — соответственно середины диагоналей AC и BD трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$). С помощью векторов докажите, что $MN \parallel AD$.

◆◆◆

16.46. Точки M_1 и M_2 — середины отрезков A_1B_1 и A_2B_2 соответственно. Докажите, что $\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2})$.

16.47. Точки M и N — соответственно середины противолежащих сторон AB и CD четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что если $MN = \frac{1}{2}(BC + AD)$, то $BC \parallel AD$.

16.48. Точки M и N — соответственно середины диагоналей AC и BD четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC})$.

16.49. В окружность вписаны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ с ортоцентрами H и H_1 соответственно. Докажите, что $\overrightarrow{HH_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}$.

16.50. Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны медианам данного треугольника.

16.51. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC отметили соответственно точки A_1, B_1 и C_1 так, что $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AC_1}{C_1B}$. Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны отрезкам AA_1, BB_1, CC_1.

16.52. Точки M и N — середины соответственно сторон AB и CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны $\frac{1}{2}AC$, $\frac{1}{2}BD$ и MN.

16.53. Точки M_1 и M_2 — середины отрезков A_1B_1 и A_2B_2 соответственно. Докажите, что середины отрезков A_1A_2, M_1M_2, B_1B_2 лежат на одной прямой.

16.54. На стороне AD и на диагонали AC параллелограмма $ABCD$ отметили соответственно точки M и N так, что $AM = \frac{1}{5}AD$ и $AN = \frac{1}{6}AC$. Докажите, что точки M, N и B лежат на одной прямой.

16.55. Пусть M_1 и M_2 — точки пересечения медиан соответственно треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$. Докажите, что $\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2})$.

16.56. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC выбраны соответственно точки C_1, A_1 и B_1 так, что $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A}$. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ совпадают.

16.57. Четырёхугольник $ABCD$ является вписанным. Точки H_1, H_2, H_3 и H_4 — ортоцентры соответственно треугольников BCD, ACD, ABD и ABC. Докажите, что середины отрезков AH_1, BH_2, CH_3 и DH_4 совпадают.

16.58. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Докажите, что если $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$, то четырёхугольник $ABCD$ — прямоугольник.

16.59. Точка пересечения отрезков, соединяющих середины противолежащих сторон четырёхугольника, совпадает с точкой пересечения его диагоналей. Докажите, что этот четырёхугольник — параллелограмм.

16.60. Дан четырёхугольник $ABCD$, середины сторон AB и CD и точка пересечения диагоналей которого принадлежат одной прямой. Докажите, что $AB \parallel CD$.

16.61. В пятиугольнике $ABCDE$ точки M, N, P и Q — середины сторон AB, BC, CD и DE соответственно. Точки K и F — середины отрезков MP и NQ соответственно. Докажите, что $KF \parallel AE$ и $KF = \frac{1}{4}AE$.

16.62. В четырёхугольнике $ABCD$ точки M и N — середины сторон AB и CD соответственно. Точка K — середина отрезка MN. Медианы треугольника BCD пересекаются в точке P. Докажите, что точки A, K и P лежат на одной прямой.

16.63. Из точки P, принадлежащей стороне AC равностороннего треугольника ABC, на стороны AB и BC опущены перпендикуляры PE и PF соответственно. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника ABC, середина отрезка EF и точка P лежат на одной прямой.

16.64. Даны треугольник ABC и произвольная точка O. Точки P, Q и R — соответственно точки пересечения медиан треугольников AOB, BOC, COA. Докажите, что точка O и точки пересечения медиан треугольников ABC и PQR лежат на одной прямой.

16.65. Параллельные прямые, проходящие через вершины A, B и C треугольника ABC, пересекают его описанную окружность в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что ортоцентры H_1, H_2 и H_3 соответственно треугольников ABC_1, BCA_1 и CAB_1 лежат на одной прямой.

§ 17 Скалярное произведение векторов

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два ненулевых и несонаправленных вектора (рис. 17.1). От произвольной точки O отложим векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, соответственно равные векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Величину угла AOB будем называть **углом между векторами** $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

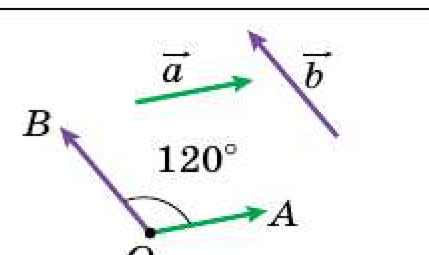


Рис. 17.1

Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают так: $\angle(\vec{a}, \vec{b})$. Например, на рисунке 17.1 $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$, а на рисунке 17.2 $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 180°$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, то считают, что $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0°$. Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ или $\vec{b}$ нулевой, то также считают, что $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0°$.

Следовательно, для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеет место неравенство:

$$0° \leqslant \angle(\vec{a}, \vec{b}) \leqslant 180°.$$

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют **перпендикулярными**, если угол между ними равен 90°. Пишут: $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Ненулевой вектор $\overrightarrow{AB}$ называют перпендикулярным прямой a, если прямые AB и a перпендикулярны (рис. 17.3).

Вы умеете складывать и вычитать векторы, умножать вектор на число. Также из курса физики вы знаете, что если под действием постоянной силы $\vec{F}$ тело переместилось из точки A в точку B (рис. 17.4), то совершённая механическая работа равна $|\vec{F}||\overrightarrow{AB}|\cos\varphi$, где $\varphi = \angle(\vec{F}, \overrightarrow{AB})$.

Этот факт подсказывает, что целесообразно ввести ещё одно действие над векторами.

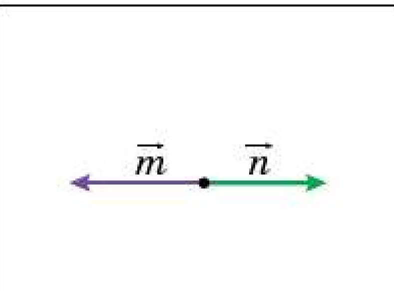


Рис. 17.2

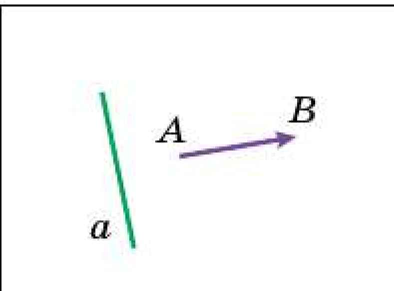


Рис. 17.3

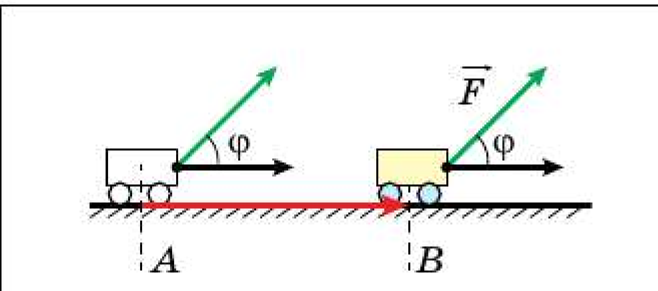


Рис. 17.4

Определение

Скалярным произведением двух векторов называют произведение их модулей и косинуса угла между ними.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают так: $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Имеем:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a}, \vec{b})}$$

Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ или $\vec{b}$ нулевой, то очевидно, что $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Пусть $\vec{a} = \vec{b}$. Тогда $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}|\cos 0° = |\vec{a}|^2$.

Скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ называют **скалярным квадратом** вектора $\vec{a}$ и обозначают $\vec{a}^2$.

Следовательно, мы получили, что $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, т. е. ***скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля.***

Отсюда $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.

Теорема 17.1

Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

Доказательство

Пусть $\vec{a} \perp \vec{b}$. Тогда $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90°$ и $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 90° = 0$.

Пусть теперь $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Тогда $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. Поскольку $|\vec{a}| \neq 0$ и $|\vec{b}| \neq 0$, то $\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. Отсюда $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90°$, т. е. $\vec{a} \perp \vec{b}$. ■

Теорема 17.2

Скалярное произведение векторов $\vec{a}(a_1; a_2)$ и $\vec{b}(b_1; b_2)$ можно вычислить по формуле

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2}$$

Доказательство

Сначала рассмотрим случай, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны.

Отложим от начала координат векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, соответственно равные векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 17.5). Тогда $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle AOB$.

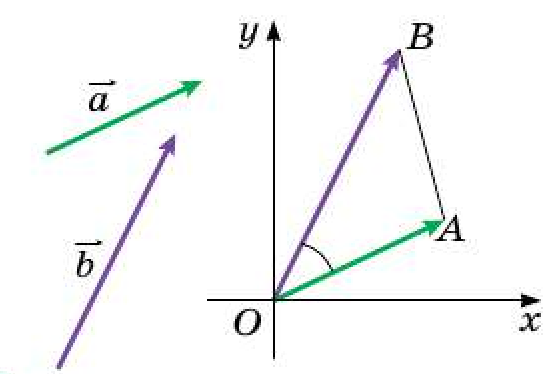


Рис. 17.5

Применим теорему косинусов к треугольнику AOB:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos\angle AOB.$$

Отсюда $OA \cdot OB \cdot \cos\angle AOB = \frac{1}{2}(OA^2 + OB^2 - AB^2)$.

Поскольку $|\vec{a}| = OA$ и $|\vec{b}| = OB$, то $OA \cdot OB \cdot \cos\angle AOB = \vec{a} \cdot \vec{b}$.

Кроме того, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}$. Отсюда $\overrightarrow{AB}(b_1 - a_1; b_2 - a_2)$.

Имеем: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}\left(\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\right)$. Воспользовавшись формулой нахождения модуля вектора по его координатам, запишем:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}((a_1^2+a_2^2)+(b_1^2+b_2^2)-(b_1-a_1)^2-(b_2-a_2)^2).$$

Упрощая выражение, записанное в правой части последнего равенства, получаем:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2.$$

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Если $\vec{a}=\vec{0}$ или $\vec{b}=\vec{0}$, то очевидно, что $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$. Если же $\vec{a}\neq\vec{0}$ и $\vec{b}\neq\vec{0}$, то существует такое число k, что $\vec{b}=k\vec{a}$, т. е. $b_1=ka_1$, $b_2=ka_2$.

Рассмотрим случай, когда $k>0$. Тогда $\angle(\vec{a},\vec{b})=0°$.

Имеем: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{a})=\left|\vec{a}\right|\left|k\vec{a}\right|\cos 0°=|k|\left|\vec{a}\right|^2=$

$=k\left(a_1^2+a_2^2\right)=a_1\cdot ka_1+a_2\cdot ka_2=a_1b_1+a_2b_2.$

Случай, когда $k<0$, рассмотрите самостоятельно. ■

Следствие

Косинус угла между ненулевыми векторами $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ и $\vec{b}(b_1;\ b_2)$ можно вычислить по формуле

$$\boxed{\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}}}\qquad(1)$$

Доказательство

Из определения скалярного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ следует, что $\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}$. Воспользовавшись теоремой 17.2 и формулой нахождения модуля вектора по его координатам, получаем формулу (1). ■

С помощью теоремы 17.2 легко доказать следующие свойства скалярного произведения векторов.

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любого числа k справедливы равенства:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a};$$

$$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k(\vec{a}\cdot\vec{b});$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}.$$

Для доказательства этих свойств достаточно выразить через координаты векторов скалярные произведения, записанные в правых и левых частях равенств, и сравнить их. Сделайте это самостоятельно.

Эти свойства, а также свойства сложения векторов и умножения вектора на число позволяют преобразовывать выражения, содержащие скалярное произведение векторов, аналогично тому, как мы преобразовываем алгебраические выражения. Например,

$$(\vec{a}+\vec{b})^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = (\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a} + (\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b} =$$
$$= \vec{a}^2 + \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2.$$

Задача 1. Известно, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$. Найдите $|2\vec{a} - 3\vec{b}|$.

Решение. Поскольку скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля, то $|2\vec{a} - 3\vec{b}|^2 = (2\vec{a} - 3\vec{b})^2$. Отсюда

$$|2\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{(2\vec{a} - 3\vec{b})^2} = \sqrt{4\vec{a}^2 - 12\vec{a}\cdot\vec{b} + 9\vec{b}^2} =$$
$$= \sqrt{4|\vec{a}|^2 - 12|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) + 9|\vec{b}|^2} = \sqrt{36+18+9} = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}.$$

Ответ: $3\sqrt{7}$. ■

Задача 2. В треугольнике ABC $AB = 4$ см, $BC = 6\sqrt{3}$ см, $\angle ABC = 30°$. Найдите медиану BM.

Решение. Применяя ключевую задачу 2 § 16, запишем: $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$ (рис. 17.6). Отсюда

$$\overrightarrow{BM}^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}^2) =$$
$$= \frac{1}{4}(|\overrightarrow{BA}|^2 + 2|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\cdot\cos\angle ABC + |\overrightarrow{BC}|^2) = \frac{1}{4}\left(16 + 48\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 108\right) = 49.$$

Следовательно, $BM^2 = 49$; $BM = 7$ см.

Ответ: 7 см. ■

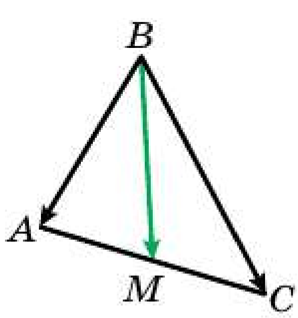


Рис. **17.6**

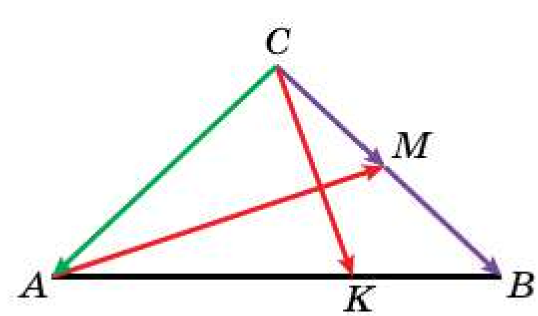


Рис. **17.7**

Задача 3. На гипотенузе AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC отметили точку K так, что $AK : KB = 2 : 1$ (рис. 17.7). Докажите, что отрезок CK перпендикулярен медиане AM.

Решение. Пусть $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Воспользовавшись ключевой задачей 2 § 16, получим: $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$.

Имеем: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}$.

С учётом того, что $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ и $\vec{a} \perp \vec{b}$, найдём скалярное произведение векторов $\overrightarrow{CK}$ и $\overrightarrow{AM}$:

$$\overrightarrow{CK} \cdot \overrightarrow{AM} = \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right)\left(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a}^2 + \frac{1}{3}\vec{b}^2 - \frac{2}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{3}|\vec{b}|^2 - \frac{1}{3}|\vec{a}|^2 = 0.$$

Следовательно, $\overrightarrow{CK} \perp \overrightarrow{AM}$. ■

Задача 4. Даны точки A и B. Найдите геометрическое место точек C таких, что медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC перпендикулярны.

Решение. Выберем систему координат так, чтобы $A\ (0;\ 0)$, $B\ (1;\ 0)$. Пусть $C\ (x;\ y)$ — вершина треугольника ABC (рис. 17.8). Очевидно, что $y \neq 0$.

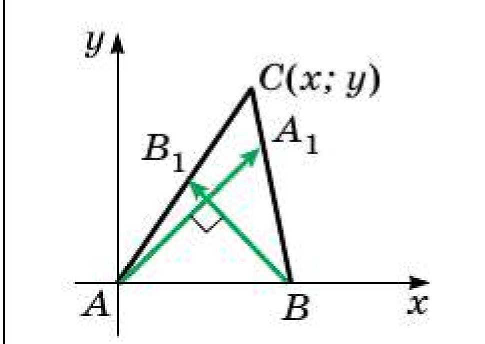


Рис. 17.8

Найдём координаты векторов $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BB_1}$. Имеем: $\overrightarrow{AA_1}\left(\frac{x+1}{2};\ \frac{y}{2}\right)$, $\overrightarrow{BB_1}\left(\frac{x-2}{2};\ \frac{y}{2}\right)$.

Точка C принадлежит искомому ГМТ тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BB_1} = 0$ и $y \neq 0$. Имеем:

$$\begin{cases} \frac{x+1}{2} \cdot \frac{x-2}{2} + \frac{y^2}{4} = 0, \\ y \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}, \\ y \neq 0. \end{cases}$$

Следовательно, искомым ГМТ является окружность радиуса $\frac{3}{2}AB$ с центром в середине отрезка AB, за исключением точек, принадлежащих прямой AB. ■

Задача 5. Найдите уравнение прямой, проходящей через данную точку $M(x_0; y_0)$ перпендикулярно данному ненулевому вектору $\vec{n}(a; b)$.

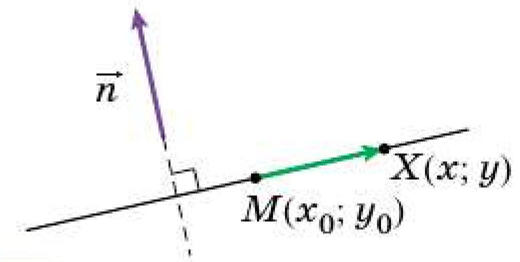


Рис. **17.9**

Решение. Пусть $X\ (x;\ y)$ — произвольная точка (рис. 17.9). Точка X принадлежит искомой прямой тогда и только тогда, когда $\vec{n} \perp \overrightarrow{MX}$, т. е. если выполняется равенство $\vec{n} \cdot \overrightarrow{MX} = 0$. Отсюда получаем:

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0} \qquad (2)$$

Уравнение (2) искомое. ■

Представим уравнение (2) в виде: $ax + by = ax_0 + by_0$.

Пусть $ax_0 + by_0 = c$. Поскольку вектор $\vec{n} \neq \vec{0}$, т. е. $a^2 + b^2 \neq 0$, то получаем общее уравнение прямой $ax + by = c$.

Решение этой задачи позволяет в общем уравнении прямой $ax + by = c$ определить геометрический смысл коэффициентов a и b: вектор $\vec{n}(a; b)$ перпендикулярен данной прямой.

1. В каких пределах находится угол между любыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$?
2. Какие векторы называют перпендикулярными?
3. Что называют скалярным произведением двух векторов?
4. Что называют скалярным квадратом вектора?
5. Чему равен скалярный квадрат вектора?
6. Сформулируйте условие перпендикулярности двух ненулевых векторов.
7. Как найти скалярное произведение векторов, если известны их координаты?
8. Как найти косинус угла между двумя ненулевыми векторами, если известны их координаты?
9. Запишите свойства скалярного произведения векторов.

Практические задания

17.1. Постройте угол, величина которого равна углу между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 17.10).

17.2. Постройте угол, величина которого равна углу между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$ (рис. 17.11).

17.3. На рисунке 17.12 изображён вектор $\vec{a}$ (длина стороны клетки равна 0,5 см). Отложите от точки A вектор $\vec{b}$ такой, что $|\vec{b}| = 3$ см и $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$. Сколько решений имеет задача?

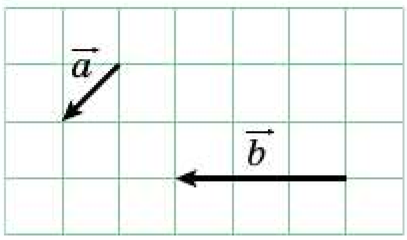


Рис. **17.10**

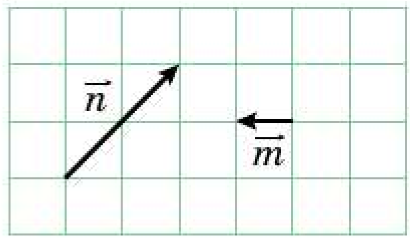


Рис. **17.11**

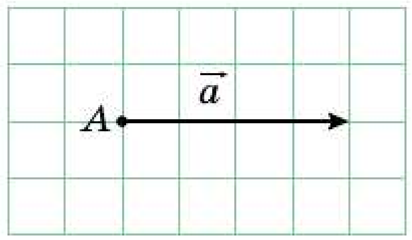


Рис. **17.12**

Упражнения

17.4. На рисунке 17.13 изображён равносторонний треугольник ABC, медианы AM и BK которого пересекаются в точке F. Найдите угол между векторами: 1) $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AM}$; 4) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AM}$; 5) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BK}$; 6) $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BK}$; 7) $\overrightarrow{CF}$ и $\overrightarrow{AB}$.

17.5. На рисунке 17.14 изображён квадрат $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O. Найдите угол между векторами: 1) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DA}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CA}$; 4) $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{CB}$; 5) $\overrightarrow{BO}$ и $\overrightarrow{CD}$.

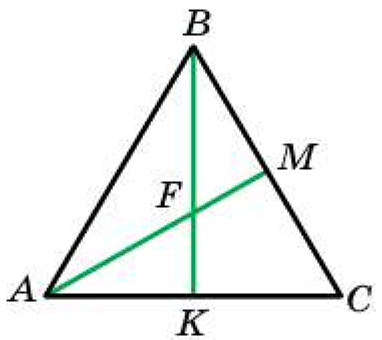


Рис. **17.13**

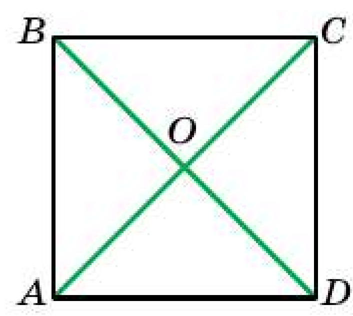


Рис. **17.14**

17.6. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

1) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60°$;

2) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 135°$;

3) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0°$;

4) $|\vec{a}| = \frac{1}{2}$, $|\vec{b}| = 6$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 180°$.

17.7. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если:

1) $|\vec{m}| = 7\sqrt{2}$, $|\vec{n}| = 4$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 45°$;

2) $|\vec{m}| = 8$, $|\vec{n}| = \sqrt{3}$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 150°$.

17.8. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

1) $\vec{a}\,(2; -1)$, $\vec{b}\,(1; -3)$;
2) $\vec{a}\,(-5; 1)$, $\vec{b}\,(2; 7)$;
3) $\vec{a}\,(1; -4)$, $\vec{b}\,(8; 2)$.

17.9. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если:

1) $\vec{m}\,(3; -2)$, $\vec{n}\,(1; 0)$;
2) $\vec{m}\left(\frac{3}{2}; -1\right)$, $\vec{n}\,(6; 9)$.

17.10. На рисунке 17.15 изображён ромб $ABCD$, в котором $AB = 6$ см, $\angle ABC = 120°$. Найдите скалярное произведение векторов: 1) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CB}$; 3) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$; 4) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{DA}$; 5) $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{AC}$; 6) $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{DC}$; 7) $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{AD}$.

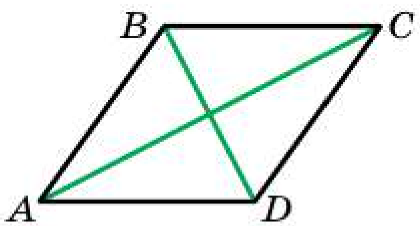


Рис. **17.15**

17.11. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, $CB = 2$ см. Найдите скалярное произведение векторов: 1) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$; 3) $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{BA}$.

17.12. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}\,(1; -2)$ и $\vec{b}\,(2; -3)$.

17.13. Какой знак имеет скалярное произведение векторов, если угол между ними: 1) острый; 2) тупой?

17.14. Известно, что скалярное произведение векторов является: 1) положительным числом; 2) отрицательным числом. Определите вид угла между векторами.

17.15. При каких значениях x угол между векторами $\vec{a}\,(2; 5)$ и $\vec{b}\,(x; 4)$: 1) острый; 2) тупой?

17.16. Найдите координаты вектора $\vec{b}$, коллинеарного вектору $\vec{a}\,(3; -4)$, если $\vec{a} \cdot \vec{b} = -100$.

17.17. В равностороннем треугольнике ABC, сторона которого равна 1, медианы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке M. Вычислите:

1) $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BB_1}$;
2) $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{MA_1}$.

17.18. Точка O — центр правильного шестиугольника $ABCDEF$, сторона которого равна 1. Вычислите:

1) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD}$;
2) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD}$;
3) $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{ED}$;
4) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD}$.

17.19. При каком значении x векторы $\vec{a}\,(3; x)$ и $\vec{b}\,(1; 9)$ перпендикулярны?

17.20. Известно, что $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Докажите, что векторы $\vec{a}(-x; y)$ и $\vec{b}(y; x)$ перпендикулярны.

17.21. При каких значениях x векторы $\vec{a}(2x; -3)$ и $\vec{b}(x; 6)$ перпендикулярны?

17.22. При каком значении y скалярное произведение векторов $\vec{a}(4; y)$ и $\vec{b}(3; -2)$ равно 14?

17.23. Известно, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны и $|\vec{a}| = |\vec{b}| \neq 0$. При каких значениях x векторы $\vec{a} + x\vec{b}$ и $\vec{a} - x\vec{b}$ перпендикулярны?

17.24. Векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ перпендикулярны. Докажите, что $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

17.25. Известно, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 45°$. Найдите скалярное произведение $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b}$.

17.26. Найдите скалярное произведение $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$.

17.27. Найдите работу силы величиной в 6 Н по перемещению тела на расстояние 7 м, если угол между направлениями силы и перемещения равен 60°.

◆ ◆

17.28. Известно, что $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 150°$. Найдите $|2\vec{a} + 5\vec{b}|$.

17.29. Известно, что $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = 2$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 60°$. Найдите $|2\vec{m} - 3\vec{n}|$.

17.30. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ с вершинами $A(3; -2)$, $B(4; 0)$, $C(2; 1)$, $D(1; -1)$ является прямоугольником.

17.31. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ с вершинами $A(-1; 4)$, $B(-2; 5)$, $C(-1; 6)$, $D(0; 5)$ является квадратом.

17.32. Найдите косинусы углов треугольника с вершинами $A(1; 6)$, $B(-2; 3)$, $C(2; -1)$.

17.33. Найдите углы треугольника с вершинами $A(0; 6)$, $B(4\sqrt{3}; 6)$, $C(3\sqrt{3}; 3)$.

17.34. Докажите, что для любых двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется неравенство $-|\vec{a}||\vec{b}| \leqslant \vec{a} \cdot \vec{b} \leqslant |\vec{a}||\vec{b}|$.

17.35. Определите взаимное расположение двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$;
2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}|$.

17.36. Найдите угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если $(\vec{m} + 3\vec{n}) \cdot (\vec{m} - \vec{n}) = 11$, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 3$.

17.37. Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) = \frac{3}{2}$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$.

17.38. В треугольнике ABC $AB = 4$, $AC = 10$, $\angle BAC = 60°$. На стороне BC отметили точку M так, что $BM : MC = 3$. Найдите отрезок AM.

◆ ◆ ◆

17.39. На параболе $y = x^2$ отметили три точки $A\ (x_1;\ y_l)$, $B\ (x_2;\ y_2)$, $C\ (x_3;\ y_3)$ так, что $\angle ABC = 90°$. Докажите, что $(x_1 + x_2)(x_2 + x_3) = -1$.

17.40. Точки M и N являются серединами соответственно сторон BC и CD ромба $ABCD$. Докажите, что если $AM \perp BN$, то четырёхугольник $ABCD$ — квадрат.

17.41. В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90°$, $AC = 1$, $BC = \sqrt{2}$. Докажите, что его медианы AK и CM перпендикулярны.

17.42. В треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) медианы CC_1 и BB_1 перпендикулярны. Найдите $\operatorname{tg} \angle ABC$.

17.43. В четырёхугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD перпендикулярны и пересекаются в точке O. Известно, что $OB = OC = 1$, $OA = 2$, $OD = 3$. Найдите угол между прямыми AB и DC.

17.44. В треугольнике ABC проведена медиана BD. Известно, что $\angle DBC = 90°$, $BD = \dfrac{\sqrt{3}}{4}AB$. Найдите угол ABD.

17.45. Точки K и M — середины соответственно сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Найдите AD, если $AK = 6$, $AM = 3$, $\angle KAM = 60°$.

17.46. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $\angle A = 65°$, $\angle D = 85°$, $AB = \sqrt{3}$, $CD = 3$. Найдите длину отрезка, соединяющего середины сторон AD и BC.

17.47. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ точки M и N — середины диагоналей AC и BD соответственно. Найдите угол между прямыми AB и CD, если $AB = 2$, $CD = 4$, $MN = \sqrt{3}$.

17.48. На гипотенузе AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC найдите такую точку K, чтобы отрезок CK и медиана AM были перпендикулярны.

17.49. На стороне AB равностороннего треугольника ABC отметили точку C_1 так, что $AC_1 : C_1B = 1 : 2$, а на стороне AC отметили точку B_1 так, что $CC_1 \perp BB_1$. Найдите отношение $AB_1 : B_1C$.

17.50. На сторонах AB и BC треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты $ABMN$ и $BCKF$. Докажите, что медиана BD треугольника ABC перпендикулярна прямой MF.

17.51. Докажите неравенство $\cos A + \cos B + \cos C \leqslant \dfrac{3}{2}$, где A, B и C — углы треугольника ABC.

Коллинеарные векторы

Ненулевые векторы называют коллинеарными, если они лежат на параллельных прямых или на одной прямой.

Равные векторы

- Два ненулевых вектора называют равными, если их модули равны и они сонаправлены. Любые два нулевых вектора равны.
- Равные векторы имеют равные соответствующие координаты. Если соответствующие координаты векторов равны, то равны и сами векторы.

Координаты вектора

Если точки $A\ (x_1;\ y_1)$ и $B\ (x_2;\ y_2)$ соответственно являются началом и концом вектора $\vec{a}$, то числа $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$ равны соответственно первой и второй координатам вектора $\vec{a}$.

Модуль вектора

Если вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(a_1;\ a_2)$, то $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

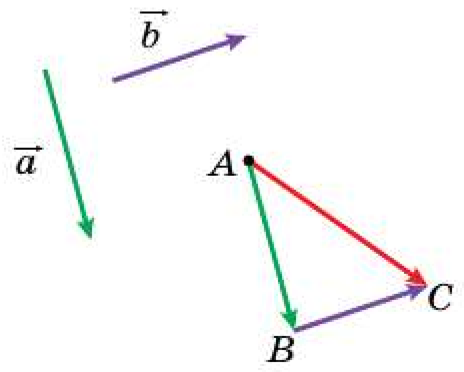
Координаты суммы векторов

Если координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно равны $(a_1;\ a_2)$ и $(b_1;\ b_2)$, то координаты вектора $\vec{a} + \vec{b}$ равны $(a_1 + b_1;\ a_2 + b_2)$.

Правила сложения двух векторов

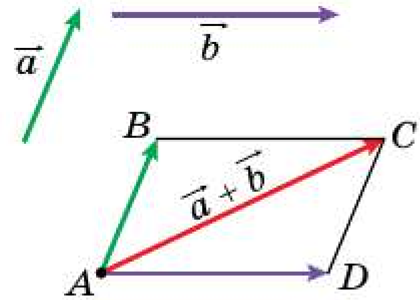
Правило треугольника

Отложим от произвольной точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}$, а от точки B отложим вектор $\overrightarrow{BC}$, равный вектору $\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ называют суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и записывают $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$.



Правило параллелограмма

Отложим от произвольной точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}$, и вектор $\overrightarrow{AD}$, равный вектору $\vec{b}$. Построим параллелограмм $ABCD$. Тогда искомая сумма $\vec{a} + \vec{b}$ равна вектору $\overrightarrow{AC}$.



Свойства сложения векторов

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ выполняются равенства:

1) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;

2) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ — переместительное свойство;

3) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ — сочетательное свойство.

Разность векторов

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют такой вектор $\vec{c}$, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$.

Координаты разности векторов

Если координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно равны $(a_1;\ a_2)$ и $(b_1;\ b_2)$, то координаты вектора $\vec{a} - \vec{b}$ равны $(a_1 - b_1; a_2 - b_2)$.

Противоположные векторы

Два ненулевых вектора называют противоположными, если их модули равны и векторы противоположно направлены.

Умножение вектора на число

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ и числа k, отличного от нуля, называют такой вектор $\vec{b}$, что:

1) $|\vec{b}| = |k||\vec{a}|$;

2) если $k > 0$, то $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$; если $k < 0$, то $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$.

Если $\vec{b} = k\vec{a}$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Свойства умножения вектора на число

- Если вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(a_1;\ a_2)$, то вектор $k\vec{a}$ имеет координаты $(ka_1;\ ka_2)$.
- Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{a} \uparrow \vec{0}$, то существует такое число k, что $\vec{b} = k\vec{a}$.
- Для любых чисел k, m и любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ справедливы равенства:

$(km)\vec{a} = k(m\vec{a})$ — сочетательное свойство;

$(k + m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$ — первое распределительное свойство;

$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ — второе распределительное свойство.

Разложение вектора по базису

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — неколлинеарные векторы. Тогда для любого вектора $\vec{c}$ существует единственная пара чисел $(x; y)$ такая, что $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

Скалярное произведение двух векторов

Скалярным произведением двух векторов называют произведение их модулей и косинуса угла между ними.

Условие перпендикулярности двух векторов

Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

Нахождение скалярного произведения двух векторов

Скалярное произведение векторов $\vec{a}\,(a_1; a_2)$ и $\vec{b}\,(b_1; b_2)$ можно вычислить по формуле $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.

Косинус угла между ненулевыми векторами

Косинус угла между ненулевыми векторами $\vec{a}\,(a_1, a_2)$ и $\vec{b}\,(b_1, b_2)$ можно вычислить по формуле

$$\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

Свойства скалярного произведения

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любого числа k справедливы равенства:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$;

$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.

глава

5 Преобразования фигур

- В этой главе вы узнаете, что такое преобразование фигуры. Ознакомитесь с такими видами преобразований: параллельный перенос, центральная симметрия, осевая симметрия, поворот, гомотетия, подобие.
- Вы научитесь применять свойства преобразований при решении задач и доказательстве теорем.

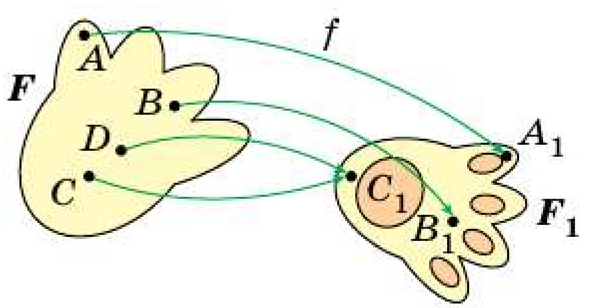
§ 18 Преобразование (отображение) фигур

Из курса алгебры вы знаете, что функцию f, у которой $D(f) = X$, $E(f) = Y$, также называют отображением множества X на множество Y.

Как правило, в алгебре элементами множеств X и Y являются числа. В геометрии естественно рассматривать такие множества X и Y, элементами которых являются точки. В этом случае множество X — это некоторая фигура F, множество Y — фигура F_1, а отображение f — это **отображение фигуры F на фигуру F_1** (рис. 18.1). Пишут: $f(F) = F_1$. Фигуру F_1 называют **образом** фигуры F, фигуру F — **прообразом** фигуры F_1 при отображении f.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. На рисунке 18.2 изображены отрезок AB, прямая a и точка O, не принадлежащая ни прямой a, ни прямой AB. Рассмотрим функцию f, областью определения которой является множество точек отрезка AB, заданную таким правилом: каждой точке X отрезка AB



f — отображение (функция),
$f(F) = F_1$, $f(A) = A_1$, $f(B) = B_1$,
$f(C) = C_1$, $f(D) = C_1$

Рис. 18.1

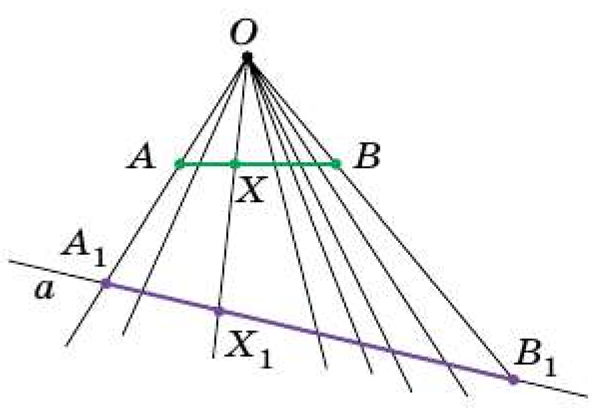


Рис. 18.2

поставим в соответствие точку X_1 прямой a так, чтобы точки O, X и X_1 лежали на одной прямой. В частности, $f(A) = A_1$, $f(B) = B_1$.

Понятно, что множество всех точек X_1 таких, что $X_1 = f(X)$, образует отрезок A_1B_1.

Таким образом, мы задали отображение f отрезка AB на отрезок A_1B_1. Также принято говорить, что задано **преобразование** f отрезка AB, результатом которого является отрезок A_1B_1. Здесь отрезок A_1B_1 — это образ отрезка AB при преобразовании f, в частности, точка A_1 — **образ точки** A, точка B_1 — образ точки B.

Слова «отображение» и «преобразование» являются синонимами. В геометрии мы чаще будем пользоваться термином «**преобразование фигуры** $\boldsymbol{F}$».

Пример 2. На рисунке 18.3 изображена окружность с диаметром AB. Зададим преобразование g окружности: каждой точке X окружности поставим в соответствие точку X_1 — основание перпендикуляра, опущенного из точки X на диаметр AB. В частности, $g(A) = A$, $g(B) = B$. При этом каждой точке окружности поставлена в соответствие единственная точка диаметра AB, и каждая точка диаметра AB является образом по крайней мере одной точки окружности.

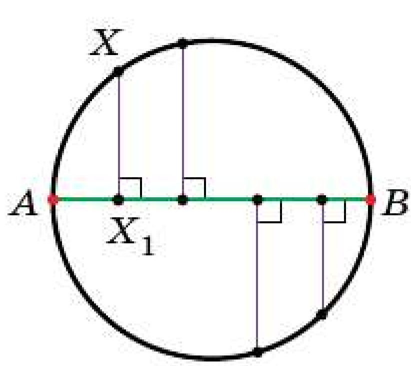


Рис. 18.3

Таким образом, мы задали преобразование g окружности, при котором образом окружности является её диаметр AB.

Пример 3. Отметим на плоскости точку O. Рассмотрим функцию h, областью определения которой являются все точки плоскости, а областью значений — множество, состоящее из одной точки O, т. е. каждой точке X плоскости поставим в соответствие точку O. Имеем: $h(X) = O$.

Здесь функция h — это преобразование плоскости, при котором образом плоскости является фигура, состоящая из одной точки O.

В примере 1 каждая точка отрезка A_1B_1 соответствует некоторой *единственной* точке отрезка AB. В таких случаях говорят, что преобразование f отрезка AB является **обратимым**. *Обратимым преобразованием фигуры называют такое преобразование, при котором различным точкам фигуры соответствуют их различные образы.*

В примере 2 преобразование окружности не является обратимым (подумайте почему).

Для каждого обратимого преобразования существует **обратное** ему преобразование. Поясним сказанное. Вновь обратимся к рисунку 18.2. Так как преобразование f отрезка AB является обратимым, то мы можем рассмотреть функцию f_1, областью определения которой является множество точек отрезка A_1B_1, заданную таким правилом: каждой точке X_1 отрезка A_1B_1 поставим в соответствие единственную точку X отрезка AB такую, что точки O, X и X_1 лежат на одной прямой. Преобразование f_1 и есть обратным преобразованию f.

Вообще, для заданного обратимого преобразования f можно указать преобразование f_1, обладающее такими свойствами:

1) *если фигура F_1 — образ фигуры F при преобразовании f, то фигура F — образ фигуры F_1 при преобразовании f_1;*

2) *если X — произвольная точка фигуры F и $f(X) = X_1$, то $f_1(X_1) = X$.*

Такое преобразование f_1 называют **обратным** преобразованию f. Также можно сказать, что преобразование f является обратным преобразованию f_1. Преобразования f и f_1 называют **взаимно-обратными**.

Рассмотрим преобразование f, при котором образом фигуры F является сама эта фигура F, т. е. $f(F) = F$. В этом случае говорят, что задано **преобразование фигуры F на себя**.

Пример 4. Рассмотрим точку M, которая лежит внутри окружности (рис. 18.4). Каждой точке X окружности поставим в соответствие точку X_1 — вторую точку пересечения прямой MX с окружностью. Получим преобразование данной окружности на себя.

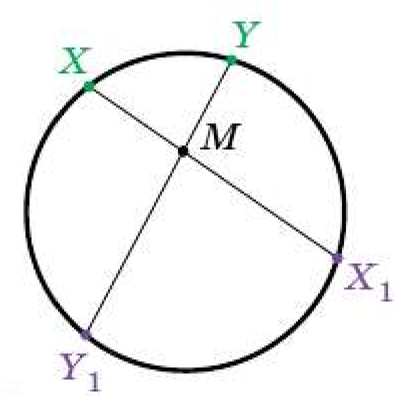


Рис. 18.4

Рассмотрим преобразование f, при котором каждой точке X фигуры F ставится в соответствие сама точка X, т. е. $f(X) = X$. Такое преобразование f фигуры F называют **тождественным**. Очевидно, что тождественное преобразование является частным случаем преобразования фигуры на себя.

Тождественное преобразование является обратимым (подумайте почему).

Пусть в результате преобразования f образом фигуры F является фигура F_1, а в результате преобразования g образом фигуры F_1 является фигура F_2, т. е. $f(F) = F_1$, $g(F_1) = F_2$ (рис. 18.5).

Преобразования f и g, выполненные последовательно, задают преобразование h, при котором образом фигуры F является фигура F_2. Такое преобразование h называют **композицией** преобразований f и g.

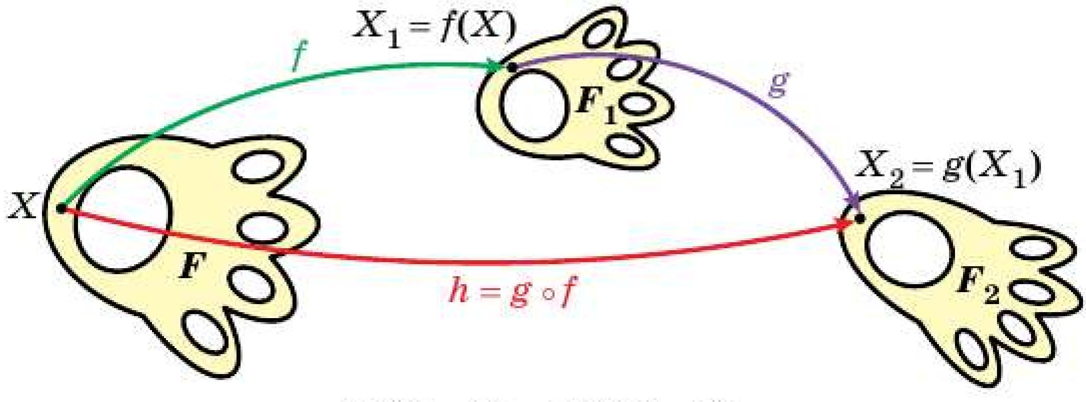


Рис. 18.5

Если выполняется сначала преобразование f, а затем преобразование g, то пишут: $h = g \circ f$. Тогда $g \circ f(F) = g(f(F)) = g(F_1) = F_2$, т. е. $g \circ f(F) = F_2$.

Рассмотрим два взаимно обратных преобразования f и g. Пусть X — произвольная точка фигуры F и $f(X) = X_1$. Тогда $g(X_1) = X$. Следовательно, $g \circ f(X) = X$. Это означает, что композиция двух взаимно обратных преобразований является тождественным преобразованием.

1. Опишите, что такое преобразование фигуры.
2. В каком случае фигуру F_1 называют образом фигуры F, а фигуру F — прообразом фигуры F_1?
3. Какое преобразование фигуры называют обратимым? Тождественным?
4. Опишите, какое преобразование фигуры называют композицией преобразований.

Практические задания

18.1. Отметим на плоскости точку O. Зададим преобразование плоскости по такому правилу: каждой точке X плоскости поставим в соответствие такую точку X_1, что точка O является серединой отрезка XX_1 (точке O поставим в соответствие саму точку O) (рис. 18.6). Постройте образы точек A и B при заданном преобразовании. Является ли это преобразование обратимым?

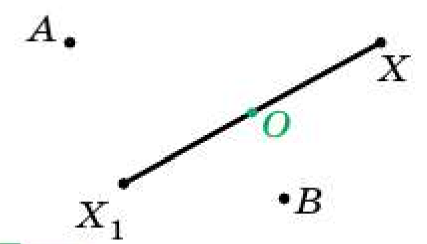


Рис. 18.6

18.2. Проведём на плоскости прямую l. Зададим преобразование плоскости по такому правилу: каждой точке X плоскости поставим в соответствие такую точку X_1, что прямая l является серединнным перпендикуляром отрезка XX_1 (каждой точке прямой l поставим в соответствие саму эту точку) (рис. 18.7). Постройте образы точек A и B при заданном преобразовании. Является ли это преобразование обратимым?

18.3. Отметим на плоскости точку O. Зададим преобразование плоскости по такому правилу: каждой точке X плоскости поставим в соответствие такую точку X_1, что $\overrightarrow{OX_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OX}$ (точке O поставим в соответствие саму точку O) (рис. 18.8). Постройте образы точек A и B при заданном преобразовании плоскости. Является ли это преобразование обратимым?

18.4. Дан вектор $\vec{a}$. Зададим преобразование плоскости по такому правилу: каждой точке X плоскости поставим в соответствие такую точку X_1, что $\overrightarrow{XX_1} = \vec{a}$ (рис. 18.9). Постройте образы точек A и B при заданном преобразовании плоскости. Является ли это преобразование обратимым?

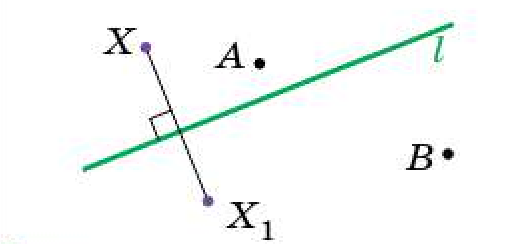


Рис. **18.7**

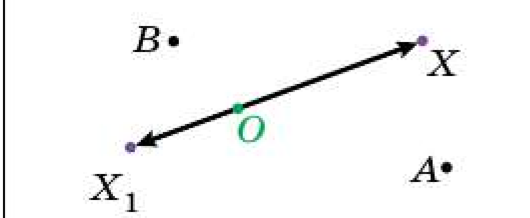


Рис. **18.8**

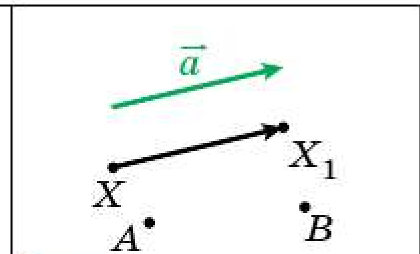


Рис. **18.9**

18.5. На рисунке 18.10 изображены угол AOB и прямая p, не параллельная его сторонам. Каждой точке X стороны OA поставлена в соответствие такая точка X_1 стороны OB, что $XX_1 \parallel p$ (точке O поставлена в соответствие сама точка O). Постройте образ точки M и прообраз точки K при данном преобразовании луча OA. Какая фигура является образом луча OA?

18.6. На рисунке 18.11 изображены отрезок AB и прямая a. Каждой точке X отрезка AB поставлено в соответствие основание перпен-

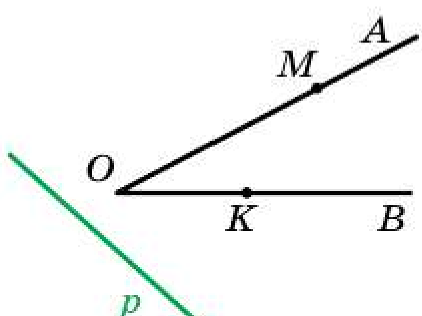


Рис. **18.10**

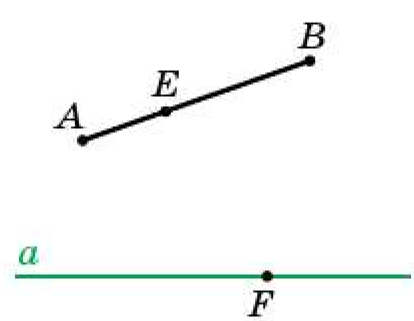


Рис. **18.11**

дикуляра, опущенного из точки X на прямую a. Постройте образ точки E и прообраз точки F при заданном преобразовании отрезка AB. Существуют ли точки прямой a, не имеющие прообраза? Постройте образ отрезка AB.

18.7. Пусть f и g — преобразования, заданные в задачах 18.1 и 18.2 соответственно. Постройте образы точек A и B (рис. 18.12) при преобразовании: 1) $f \circ g$; 2) $g \circ f$.

18.8. Пусть f и g — преобразования, заданные в задачах 18.3 и 18.4 соответственно. Постройте образы точек A и B (рис. 18.13) при преобразовании: 1) $f \circ g$; 2) $g \circ f$.

18.9. Прямая a касается полуокружности AB с центром в точке O (рис. 18.14). Задайте какое-нибудь преобразование полуокружности AB, при котором прямая a является образом полуокружности AB с «выколотыми» точками A и B. Выясните, является ли заданное преобразование обратимым.

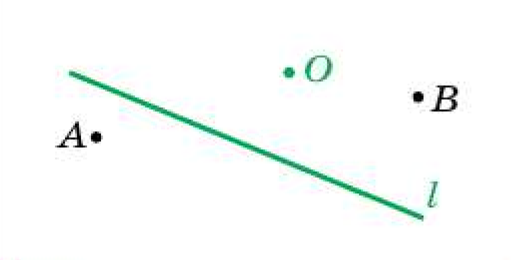


Рис. 18.12

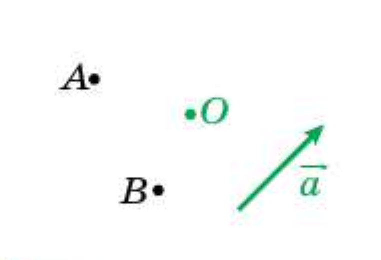


Рис. 18.13

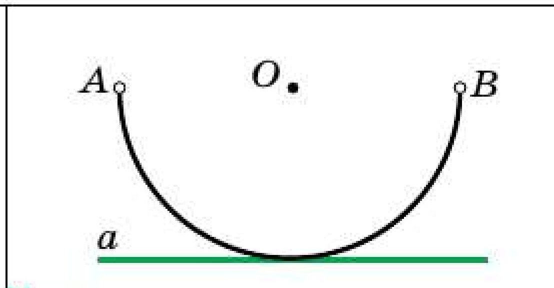


Рис. 18.14

18.10. Задайте какое-нибудь преобразование отрезка AB, при котором отрезок CD является образом отрезка AB (рис. 18.15). Выясните, является ли заданное преобразование обратимым.

18.11. Отрезок AB перпендикулярен прямой MN (рис. 18.16). Задайте какое-нибудь преобразование отрезка AB, при котором образом отрезка AB с «выколотой» точкой A является луч BN.

18.12. Отрезок AB перпендикулярен прямой l (рис. 18.17). Задайте какое-нибудь преобразование отрезка AB, при котором образом отрезка AB с «выколотыми» концами A, B является прямая l.

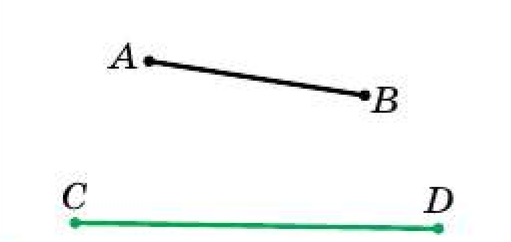


Рис. 18.15

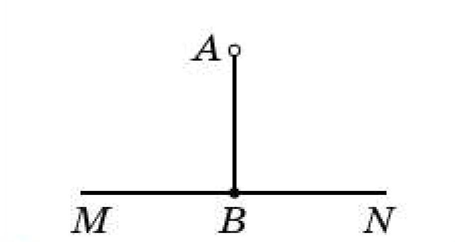


Рис. 18.16

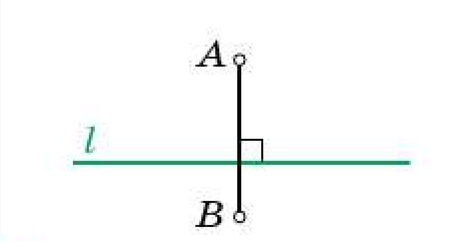


Рис. 18.17

Упражнения

18.13. Задайте какое-нибудь преобразование квадрата $ABCD$, при котором образом квадрата является сторона AB.

18.14. Задайте какое-нибудь преобразование квадрата $ABCD$, при котором образом квадрата является диагональ AC.

18.15. Рассмотрим окружность радиуса r с центром O. Каждой точке X окружности поставим в соответствие точку X_1, принадлежащую радиусу OX, такую, что $OX_1 = \frac{1}{2}r$. Какая фигура является образом данной окружности?

18.16. Дан угол AOB. Каждой точке X стороны OA поставим в соответствие точку X_1, которая принадлежит стороне OB и лежит на окружности с центром O радиуса OX (точке O поставим в соответствие саму точку O) (рис. 18.18). Какая фигура является образом стороны OA?

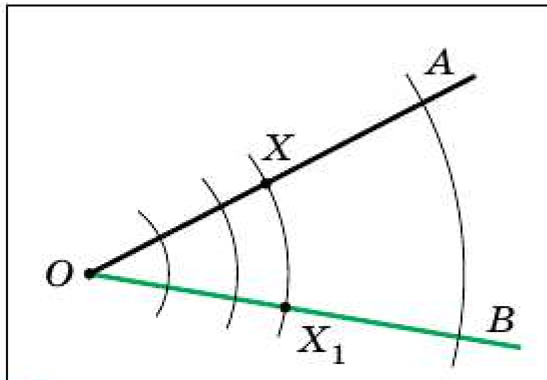


Рис. **18.18**

18.17. Дан угол MON. Каждой точке X стороны OM поставим в соответствие такую точку X_1 стороны ON, что прямая XX_1 перпендикулярна биссектрисе угла MON (точке O соответствует сама точка O). Является ли описанное преобразование луча OM обратимым?

18.18. Известно, что при преобразовании фигуры F её образом является сама фигура F. Можно ли утверждать, что это преобразование является тождественным?

18.19. Рассмотрим фигуру, состоящую из всех точек, принадлежащих сторонам прямоугольника. Опишите какое-нибудь преобразование этой фигуры, при котором её образом является окружность.

18.20. Рассмотрим фигуру, состоящую из всех точек, принадлежащих сторонам прямоугольника. Опишите какое-нибудь преобразование этой фигуры, при котором её образом является фигура, состоящая из всех точек сторон ромба.

18.21. Задайте какое-нибудь преобразование плоскости, при котором её образом является: 1) прямая; 2) луч; 3) отрезок; 4) две точки.

18.22. Отметим на плоскости точку O. Зададим преобразование плоскости по такому правилу: каждой точке X плоскости поставим в соответствие такую точку X_1, что $\overrightarrow{OX_1} = 2\overrightarrow{OX}$ (точке O соответствует сама точка O). Докажите, что это преобразование является обратимым, и задайте преобразование, обратное данному.

18.23. Проведём на плоскости прямую l. Зададим преобразование плоскости по такому правилу: каждой точке X плоскости поставим в соответствие такую точку X_1, что $XX_1 \perp l$, $X_1M = \frac{1}{2}XM$, где $M = XX_1 \cap l$, и точки X и X_1 лежат в разных полуплоскостях относительно прямой l (каждой точке прямой l поставим в соответствие эту же точку) (рис. 18.19). Докажите, что это преобразование является обратимым, и задайте преобразование, обратное данному.

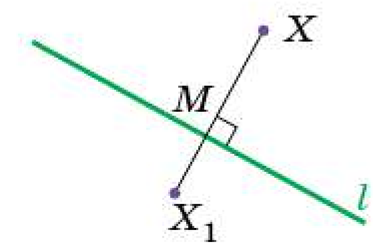


Рис. 18.19

18.24. Задайте преобразование отрезка, отличное от тождественного, при котором образом отрезка является сам этот отрезок.

18.25. Рассматривается фигура, состоящая из трёх точек A, B и C. Укажите образы точки A при всех возможных преобразованиях данной фигуры на себя.

18.26. Любое ли преобразование фигуры F на себя является обратимым?

§ 19 Движение. Параллельный перенос

Какие свойства преобразования фигуры гарантируют сохранение её размера и формы? Оказывается, достаточно потребовать лишь сохранения расстояния между точками. То есть, если A и B — произвольные точки фигуры F, а A_1 и B_1 — их образы, то должно выполняться равенство $AB = A_1B_1$.

Определение

Преобразование фигуры F, сохраняющее расстояние между её точками, называют движением фигуры F.

Простейшим примером движения является тождественное преобразование.

Рассмотрим свойства движения.

Теорема 19.1

При движении фигуры F образами любых её трёх точек, лежащих на одной прямой, являются три точки, лежащие на одной прямой, а образами трёх точек, не лежащих на одной прямой, являются три точки, не лежащие на одной прямой.

Доказательство

Пусть точки A, B и C фигуры F лежат на данной прямой, причём точка B принадлежит отрезку AC (рис. 19.1). Тогда

$$AC = AB + BC. \qquad (1)$$

Рассмотрим движение f фигуры F.

Пусть $f(A) = A_1$, $f(B) = B_1$, $f(C) = C_1$. Из определения движения следует, что $AC = A_1C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$. С учётом равенства (1) можно записать $A_1C_1 = A_1B_1 + B_1C_1$. Следовательно, точка B_1 принадлежит отрезку A_1C_1, т. е. точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

Используя неравенство треугольника, докажите вторую часть теоремы самостоятельно. ■

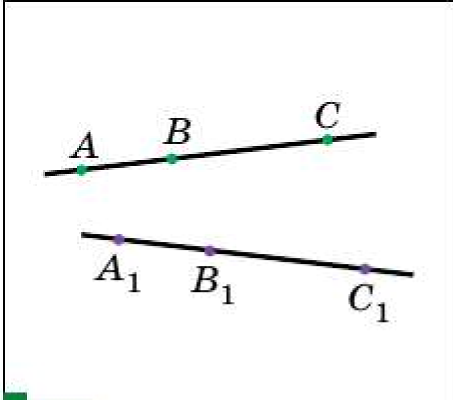


Рис. 19.1

Следствие

При движении отрезка, луча, прямой, угла образами являются соответственно отрезок, луч, прямая, угол.

Докажем первое из указанных свойств (остальные свойства вы можете доказать самостоятельно).

Пусть X — произвольная точка отрезка AB. Рассмотрим некоторое движение f отрезка AB. Пусть $f(A) = A_1$, $f(B) = B_1$, $f(X) = X_1$. При доказательстве теоремы 19.1 было показано, что точка X_1 принадлежит отрезку A_1B_1. Это означает, что образы всех точек отрезка AB принадлежат отрезку A_1B_1.

Покажем, что для каждой точки Y_1 отрезка A_1B_1 найдётся точка Y отрезка AB такая, что $f(Y) = Y_1$. Выберем на отрезке AB такую точку Y, что $AY = A_1Y_1$. Пусть $f(Y) = Y_2$. Тогда точка Y_2 принадлежит отрезку A_1B_1 и $AY = A_1Y_2$. Получаем, что $A_1Y_1 = A_1Y_2$. Следовательно, точки Y_1 и Y_2 совпадают, т. е. $f(Y) = Y_1$. ■

Теорема 19.2

Если f — движение, при котором образом угла ABC является угол $A_1B_1C_1$, то $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$.

Доказательство

Отметим на лучах BA и BC точки M и N соответственно. Пусть $f(M) = M_1$, $f(N) = N_1$ (рис. 19.2). Точки M_1 и N_1 принадлежат лучам B_1A_1 и B_1C_1 соответственно. Поскольку $BM = B_1M_1$, $BN = B_1N_1$, $MN = M_1N_1$, то треугольники BMN и $B_1M_1N_1$ равны по третьему признаку равенства треугольников. Отсюда $\angle B = \angle B_1$. ■

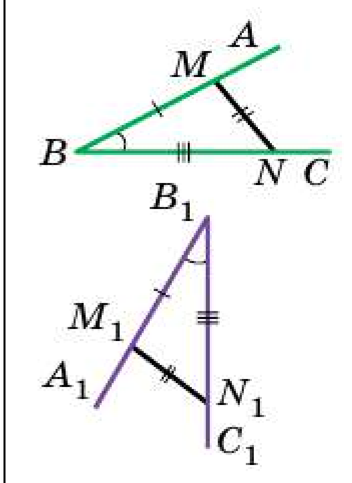


Рис. 19.2

Теорема 19.3

Если f — движение, при котором образом треугольника ABC является треугольник $A_1B_1C_1$, то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Докажите эту теорему самостоятельно.

Теорема 19.4

Движение является обратимым преобразованием. Преобразование, обратное движению, также является движением.

Доказательство

Предположим, что движение f фигуры F не является обратимым преобразованием. Тогда найдутся две различные точки A и B фигуры F такие, что $f(A) = f(B) = C$. Отсюда следует, что расстояние между образами точек A и B равно нулю. Получили противоречие, т. к. $AB \neq 0$.

Вторую часть теоремы докажите самостоятельно. ■

Теорема 19.5

Если f и g — движения, то композиция этих преобразований также является движением.

Докажите эту теорему самостоятельно.

Мы давно используем понятие «равенство фигур», хотя не давали ему строгого определения.

Свойства движения указывают на то, что движение связано с равенством фигур. Поэтому уместно договориться о таком определении.

Определение

Две фигуры называют равными, если существует движение, при котором одна из данных фигур является образом другой.

Запись $F = F_1$ означает, что фигуры F и F_1 равны.

Ранее мы под равными понимали такие фигуры, которые совпадали при наложении. Термин «наложение» интуитивно понятен, и в нашем представлении он связывается с наложением реальных объектов. Но геометрические фигуры нельзя наложить друг на друга в буквальном смысле этого слова. Теперь наложение фигуры F на фигуру F_1 можно рассматривать как движение фигуры F, при котором её образом является фигура F_1.

Термин «движение» также ассоциируется с определённым физическим действием: изменением положения тела без деформации. Именно с этим связано появление этого термина в математике. Однако в геометрии предметом исследования является не процесс, происходящий во времени, а лишь свойства фигуры и её образа.

Пусть даны некоторая фигура F и вектор $\vec{a}$. Каждой точке X фигуры F поставим в соответствие точку X_1 такую, что $\overrightarrow{XX_1} = \vec{a}$. В результате такого преобразования фигуры F получим фигуру F_1 (рис. 19.3). Такое преобразование фигуры F называют **параллельным переносом на вектор $\vec{a}$** и обозначают так: $T_{\vec{a}}$. Пишут: $T_{\vec{a}}(F) = F_1$.

То, что изображённые на рисунке 19.3 фигуры F и F_1 равны, наглядно очевидно. Строгое обоснование этого факта даёт следующая теорема.

Теорема 19.6

(свойство параллельного переноса)

Параллельный перенос является движением.

Доказательство

Пусть $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ — произвольные точки фигуры F (рис. 19.4), точки A_1 и B_1 — их соответствующие образы при парал-

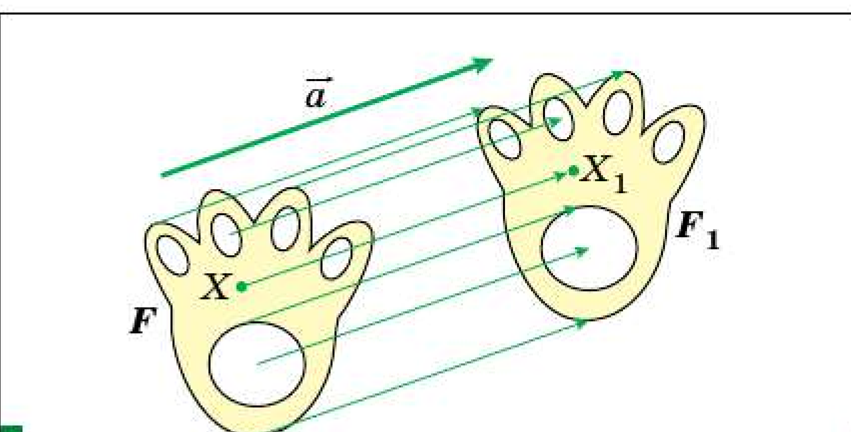


Рис. 19.3

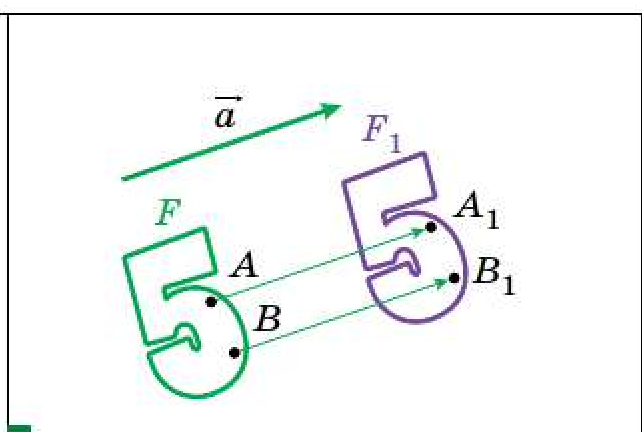


Рис. 19.4

лельном переносе на вектор $\vec{a}(m; n)$, т. е. $T_{\vec{a}}(A) = A_1$, $T_{\vec{a}}(B) = B_1$. Тогда векторы $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BB_1}$ имеют координаты $(m; n)$. Следовательно, координатами точек A_1 и B_1 являются соответственно пары чисел $(x_1 + m; y_1 + n)$ и $(x_2 + m; y_2 + n)$.

Имеем:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(x_2 + m - x_1 - m)^2 + (y_2 + n - y_1 - n)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Следовательно, мы показали, что $AB = A_1B_1$, т. е. параллельный перенос сохраняет расстояние между точками. ■

Следствие

Если фигура F_1 — образ фигуры F при параллельном переносе, то $F_1 = F$.

Это свойство используется при создании узоров тканей, обоев, покрытий для пола и т. п. (рис. 19.5).

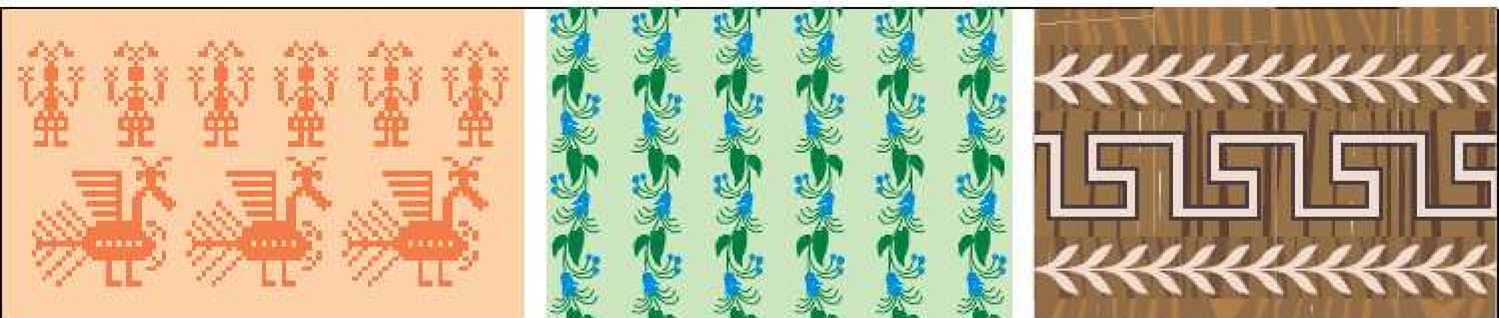


Рис. 19.5

Если фигура F_1 является образом фигуры F при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$, то фигура F является образом фигуры F_1 при параллельном переносе на вектор $-\vec{a}$ (рис. 19.6). Параллельные переносы фигуры F на вектор $\vec{a}$ и фигуры F_1 на вектор $-\vec{a}$ являются **взаимно обратными преобразованиями**.

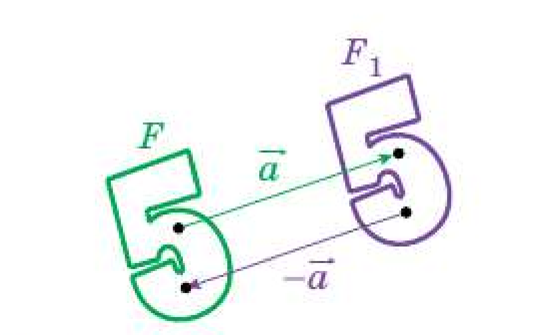


Рис. 19.6

Задача 1. Каждой точке $X(x; y)$ фигуры F поставлена в соответствие точка $X_1(x + m; y + n)$, где m и n — данные числа. Докажите, что такое преобразование фигуры F является параллельным переносом на вектор $\vec{a}(m; n)$.

Решение. Рассмотрим вектор $\vec{a}\,(m;\ n)$. Заметим, что координаты вектора $\overrightarrow{XX_1}$ равны $(m;\ n)$, т. е. $\overrightarrow{XX_1} = \vec{a}$. Следовательно, описанное преобразование фигуры F — параллельный перенос на вектор $\vec{a}$. ■

Задача 2. Точка $A_1\,(-2;\ 3)$ является образом точки $A\,(-1;\ 2)$ при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$. Найдите координаты вектора $\vec{a}$ и координаты образа точки $B\,(-7;\ -3)$.

Решение. Из условия следует, что $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$. Отсюда $\vec{a}\,(-1;\ 1)$. Пусть $B_1\,(x;\ y)$ — образ точки $B\,(-7;\ -3)$. Тогда $\overrightarrow{BB_1} = \vec{a}$, т. е. $x + 7 = -1$ и $y + 3 = 1$. Отсюда $x = -8$, $y = -2$.

Ответ: $\vec{a}\,(-1;\ 1)$; $B_1\,(-8;\ -2)$. ■

Задача 3. Даны угол ABC и прямая p, не параллельная ни одной из сторон этого угла (рис. 19.7). Постройте прямую p_1, параллельную прямой p, так, чтобы стороны угла отсекали на ней отрезок данной длины a.

Решение. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{MN}$ такой, что $MN \parallel p$ и $|\overrightarrow{MN}| = a$ (рис. 19.8). Построим луч B_1A_1, являющийся образом луча BA при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{MN}$. Пусть лучи BC и B_1A_1 пересекаются в некоторой точке E. Рассмотрим точку F — прообраз точки E при рассматриваемом параллельном переносе. Тогда $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{MN}$, т. е. $|\overrightarrow{FE}| = a$ и $FE \parallel p$.

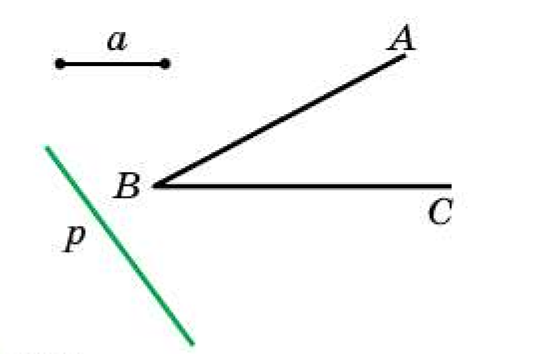


Рис. 19.7

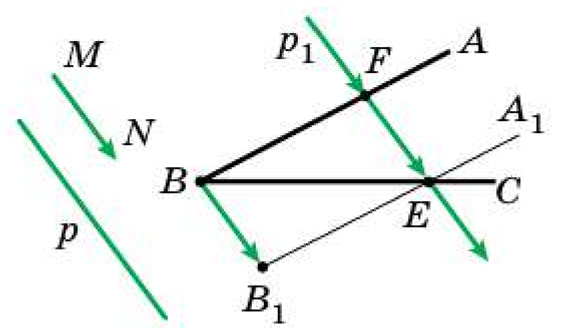


Рис. 19.8

Приведённые рассуждения подсказывают следующий алгоритм построения:

1) найти образ луча BA при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{MN}$;

2) отметить точку пересечения луча BC с построенным образом;

3) через найденную точку провести прямую p_1, параллельную прямой p. Прямая p_1 будет искомой. ■

1. Какое преобразование фигуры называют движением?
2. Сформулируйте свойства движения.
3. Какие две фигуры называют равными?
4. Опишите, какие движения называют взаимно обратными.
5. Опишите преобразование фигуры F, которое называют параллельным переносом на вектор $\vec{a}$.
6. Сформулируйте свойство параллельного переноса.
7. Какими движениями являются параллельные переносы на векторы $\vec{a}$ и $-\vec{a}$?

Практические задания

19.1. Постройте образы отрезка AB и луча OM при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ (рис. 19.9).

19.2. На рисунке 19.10 прямая a является образом некоторой прямой при параллельном переносе на вектор $\vec{m}$. Постройте прообраз прямой a.

19.3. Окружность с центром O_1 является образом окружности с центром O при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ (рис. 19.11). Отложите вектор $\vec{a}$ от точки M.

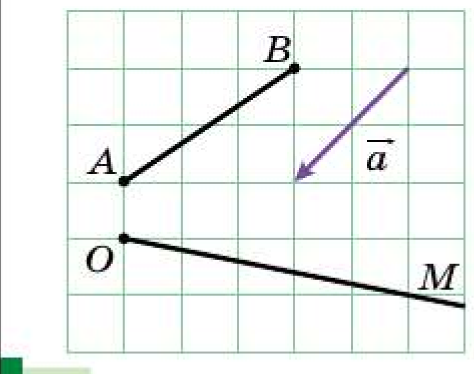


Рис. 19.9

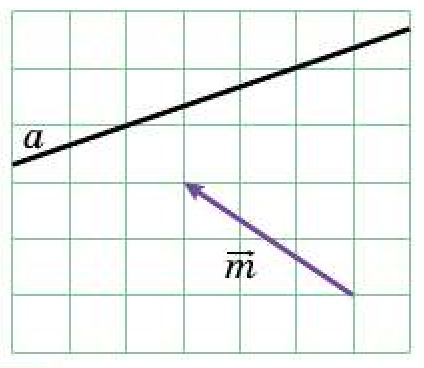


Рис. 19.10

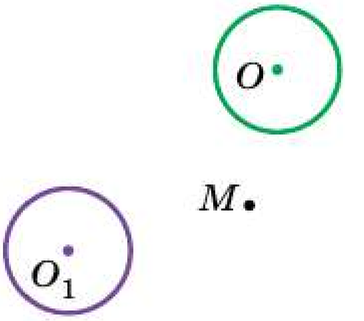


Рис. 19.11

19.4. На рисунке 19.12 треугольник $A_1B_1C_1$ является образом треугольника ABC при некотором движении f. Постройте образ точки M при этом движении[1].

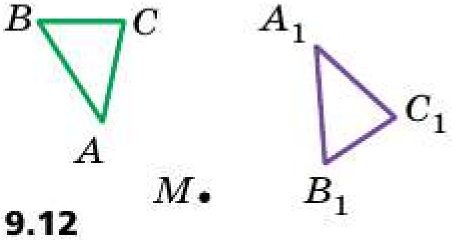


Рис. 19.12

[1] Эта задача является иллюстрацией к следующей теореме: ***любое движение плоскости задаётся движением трёх точек, не лежащих на одной прямой***.

Упражнения

19.5. Рассмотрим окружность радиуса r с центром в точке O. Каждой точке X окружности поставим в соответствие точку X_1, принадлежащую радиусу OX, такую, что $OX_1 = \frac{1}{2}r$. Является ли движением описанное преобразование?

19.6. Дан угол AOB (рис. 19.13). Каждой точке X стороны OA поставим в соответствие точку X_1, которая принадлежит стороне OB и лежит на окружности радиуса OX с центром O (точке O поставим в соответствие саму точку O). Докажите, что описанное преобразование является движением.

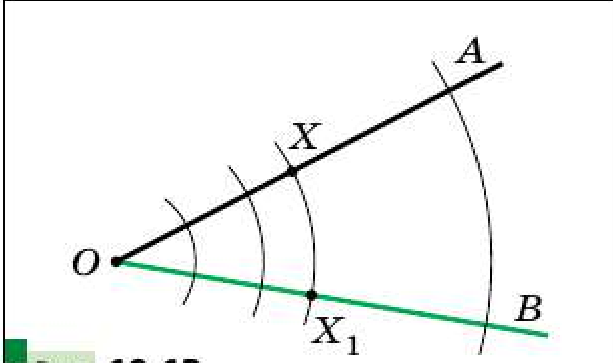


Рис. **19.13**

19.7. Дан угол MON. Каждой точке X стороны OM поставлена в соответствие такая точка X_1 стороны ON, что прямая XX_1 перпендикулярна биссектрисе угла MON (точке O соответствует сама точка O). Докажите, что описанное преобразование является движением.

19.8. Даны прямая a и отрезок AB, не имеющий с ней общих точек. Каждой точке X отрезка AB поставлено в соответствие основание перпендикуляра, опущенного из точки X на прямую a. При каком взаимном расположении прямой a и отрезка AB описанное преобразование является движением?

19.9. Точки A_1 и B_1 не принадлежат прямой AB и являются образами соответственно точек A и B при параллельном переносе прямой AB. Докажите, что четырёхугольник AA_1B_1B — параллелограмм.

19.10. Точки A_1 и B_1 являются образами соответственно точек A и B при параллельном переносе отрезка AB. Найдите длину отрезка A_1B_1, если $AB = 5$ см.

19.11. Вектор $\vec{m}$ параллелен прямой a. Какая фигура является образом прямой a при параллельном переносе на вектор $\vec{m}$?

19.12. Дан параллелограмм $ABCD$. Какой вектор задаёт параллельный перенос параллелограмма, при котором сторона AD является образом стороны BC?

19.13. Существует ли параллельный перенос равностороннего треугольника ABC, при котором сторона AB является образом стороны BC?

19.14. Найдите точки, являющиеся образами точек A $(-2; 3)$ и B $(1; -4)$ при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ $(-1; -3)$.

19.15. Существует ли параллельный перенос, при котором образом точки A $(1; 3)$ является точка A_1 $(4; 0)$, а образом точки B $(-2; 1)$ — точка B_1 $(1; 4)$?

19.16. При параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ $(2; -1)$ образом точки A является точка A_1 $(-3; 4)$. Найдите координаты точки A.

19.17. Точка M_1 $(x; 2)$ является образом точки M $(3; y)$ при параллельном переносе, при котором точка A $(2; 3)$ является образом начала координат. Найдите x и y.

◆ ◆

19.18. Сколько существует параллельных переносов прямой a, при которых её образом является прямая a?

19.19. Даны точки A $(3; -2)$ и B $(5; -4)$. При параллельном переносе отрезка AB образом его середины является точка M_1 $(-4; 3)$. Найдите образы точек A и B.

19.20. Точки A $(1; 3)$, B $(2; 6)$, C $(-3; 1)$ являются вершинами параллелограмма $ABCD$. При параллельном переносе параллелограмма $ABCD$ образом точки пересечения его диагоналей является точка O_1 $(-2; -4)$. Найдите образы точек A, B, C и D.

19.21. Найдите уравнение окружности, являющейся образом окружности $x^2 + y^2 = 1$ при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ $(-3; 4)$.

19.22. Найдите уравнение параболы, являющейся образом параболы $y = x^2$ при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ $(2; -3)$.

19.23. Внутри прямоугольника $ABCD$ отметили точку M. Докажите, что существует выпуклый четырёхугольник, диагонали которого перпендикулярны и равны AB и BC, а стороны равны MA, MB, MC и MD.

◆ ◆ ◆

19.24. Постройте трапецию по основаниям и диагоналям.

19.25. Постройте трапецию по четырём сторонам.

19.26. Постройте отрезок, равный и параллельный данному отрезку AB, так, чтобы один его конец принадлежал данной прямой, а другой — данной окружности.

19.27. Постройте хорду данной окружности, равную и параллельную данному отрезку AB.

19.28. Две окружности радиуса R касаются в точке M. На одной из них отметили точку A, на другой — точку B так, что $\angle AMB = 90°$. Докажите, что $AB = 2R$.

19.29. Постройте четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно непараллельны, по четырём углам и двум противолежащим сторонам.

19.30. В каком месте следует построить мост MN через реку, разделяющую два населённых пункта A и B (рис. 19.14), чтобы путь $AMNB$ был кратчайшим (берега реки считаем параллельными прямыми, мост перпендикулярен берегам реки)?

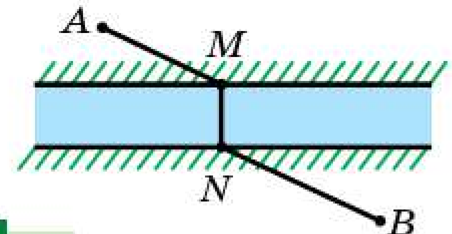


Рис. **19.14**

19.31. Внутри прямоугольника $ABCD$ выбрана точка M так, что $\angle BMC + \angle AMD = 180°$. Найдите сумму углов BCM и MAD.

19.32. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка M так, что $\angle MAD = \angle MCD$. Докажите, что $\angle MBC = \angle MDC$.

§ 20 Осевая симметрия

Определение

Точки A и A_1 называют симметричными относительно прямой l, если прямая l является серединным перпендикуляром отрезка AA_1 (рис. 20.1). **Если точка A принадлежит прямой l, то её считают симметричной самой себе относительно прямой l.**

Например, точки A и A_1, ординаты которых равны, а абсциссы — противоположные числа, симметричны относительно оси ординат (рис. 20.2).

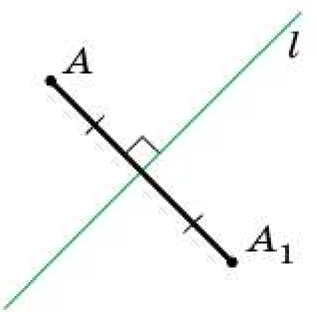


Рис. **20.1**

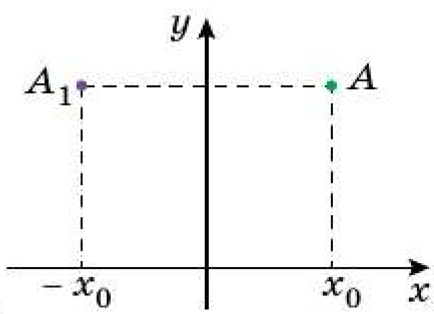


Рис. **20.2**

Рассмотрим фигуру F и прямую l. Каждой точке X фигуры F поставим в соответствие симметричную ей относительно прямой l точку X_1. В результате такого преобразования фигуры F получим фигуру F_1 (рис. 20.3). Такое преобразование фигуры F называют **осевой симметрией относительно прямой l**. Преобразование, являющееся осевой симметрией относительно прямой l, обозначают так: S_l. Пишут $S_l(F) = F_1$. Прямую l называют **осью симметрии**. Говорят, что фигуры F и F_1 **симметричны относительно прямой l**.

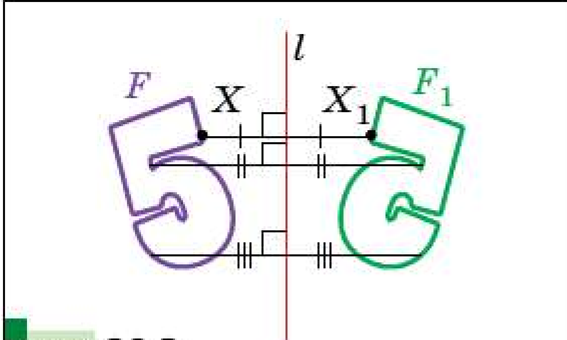


Рис. 20.3

Теорема 20.1

(свойство осевой симметрии)

Осевая симметрия является движением.

Доказательство

Выберем систему координат так, чтобы ось симметрии совпадала с осью ординат.

Пусть $A\ (x_1;\ y_1)$ и $B\ (x_2;\ y_2)$ — произвольные точки фигуры F. Тогда точки $A_1\ (-x_1;\ y_1)$ и $B_1\ (-x_2;\ y_2)$ — их соответствующие образы при осевой симметрии фигуры F относительно оси ординат.

Имеем:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(-x_2 - (-x_1))^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = AB.$$

Следовательно, $AB = A_1B_1$, т. е. осевая симметрия сохраняет расстояние между точками. ■

Следствие 1

Если $S_l(F) = F_1$, то $F = F_1$.

Следствие 2

Осевая симметрия является обратимым преобразованием. Если $S_l(F) = F_1$, то $S_l(F_1) = F$, т. е. $S_l \circ S_l(F) = F$.

Доказательство

Первая часть теоремы следует из обратимости движения.

Пусть X — произвольная точка фигуры F и $S_l(X) = X_1$. Тогда $S_l(X_1) = X$. Отсюда $S_l \circ S_l\,(X) = X$, т. е. $S_l \circ S_l\,(F) = F$. ■

Определение

Фигуру F называют симметричной относительно прямой l, если $S_l(F) = F$.

Прямую l называют **осью симметрии фигуры F**. Также говорят, что **фигура F имеет ось симметрии**.

Приведём примеры фигур, имеющих ось симметрии.

На рисунке 20.4 изображён равнобедренный треугольник. Прямая, содержащая его высоту, проведённую к основанию, является осью симметрии треугольника.

Любой угол имеет ось симметрии — это прямая, содержащая его биссектрису (рис. 20.5).

Равносторонний треугольник имеет три оси симметрии (рис. 20.6).

Две оси симметрии имеет отрезок: это его серединный перпендикуляр и прямая, содержащая этот отрезок (рис. 20.7).

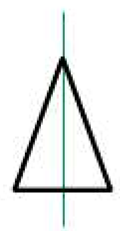


Рис. 20.4

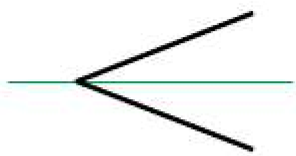


Рис. 20.5

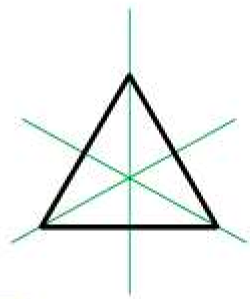


Рис. 20.6

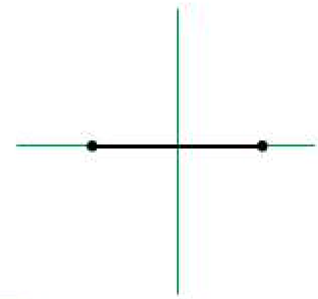


Рис. 20.7

Квадрат имеет четыре оси симметрии (рис. 20.8).

Прямоугольник и ромб, отличные от квадрата, имеют ровно по две оси симметрии (рис. 20.9, 20.10). Эти оси перпендикулярны. Вообще, справедлива такая теорема.

Теорема 20.2

Если фигура имеет ровно две оси симметрии, то эти оси перпендикулярны.

Существуют фигуры, имеющие бесконечно много осей симметрии, например окружность. Любая прямая, проходящая через центр окружности, является её осью симметрии (рис. 20.11).

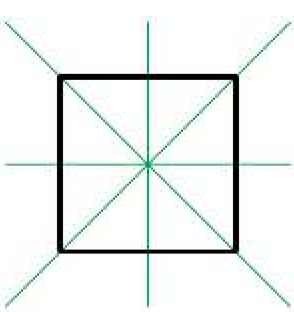


Рис. 20.8

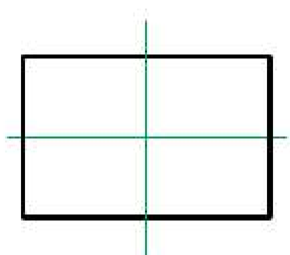


Рис. 20.9

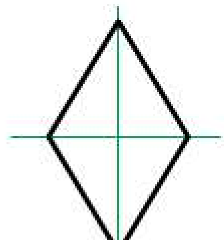


Рис. 20.10

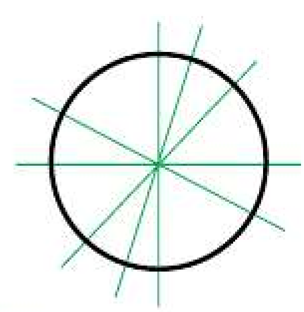


Рис. 20.11

Бесконечно много осей симметрии имеет и прямая: сама прямая и любая прямая, ей перпендикулярная, являются её осями симметрии.

Мы видим, что оси симметрии равностороннего треугольника, прямоугольника, ромба, квадрата пересекаются в одной точке. Вообще, справедлива следующая теорема.

Теорема 20.3

Если многоугольник имеет две или более осей симметрии, то все они пересекаются в одной точке.[1]

Пусть $l_1 \parallel l_2$ и $S_{l_1}(F) = F_1$, $S_{l_2}(F_1) = F_2$ (рис. 20.12). Наглядно очевидно, что фигура F_2 — это образ фигуры F при некотором параллельном переносе.

Строгое обоснование этого факта даёт следующая теорема.

Теорема 20.4

Композиция двух осевых симметрий с параллельными осями является параллельным переносом.

Составим план доказательства, который вы сможете реализовать самостоятельно.

Пусть прямые l_1 и l_2 параллельны и $T_{\vec{a}}(l_1) = l_2$, где $\vec{a} \perp l_1$. Покажите, что $S_{l_2} \circ S_{l_1} = T_{2\vec{a}}$.

Для этого введите систему координат так, как показано на рисунке 20.13. Пусть X — произвольная точка фигуры F, $S_{l_1}(X) = X_1$, $S_{l_2}(X_1) = X_2$. Докажите, что $\overrightarrow{XX_2} = 2\vec{a}$.

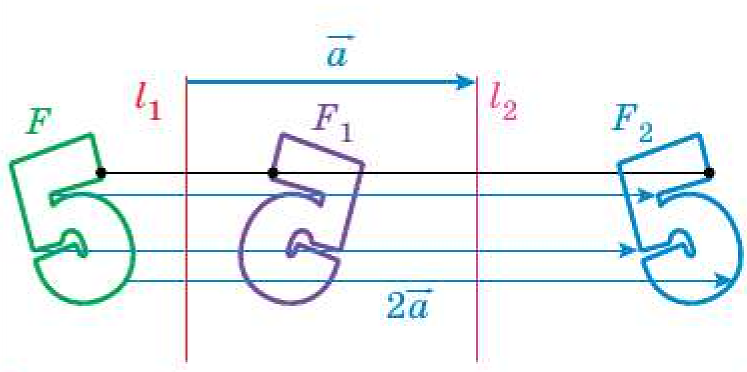


Рис. 20.12

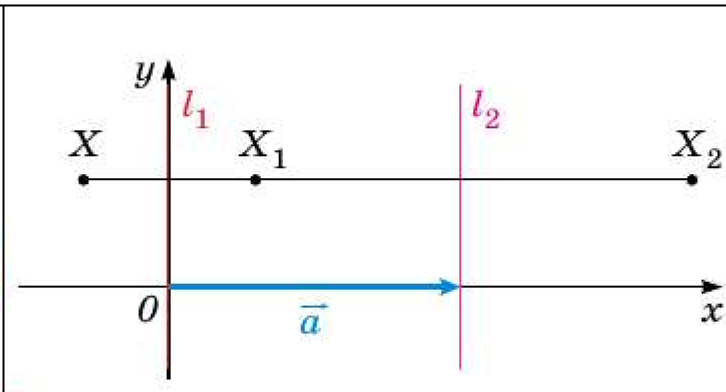


Рис. 20.13

[1] С доказательством теорем 20.2 и 20.3 вы сможете ознакомиться, если примете участие в работе над проектом «Преобразования плоскости».

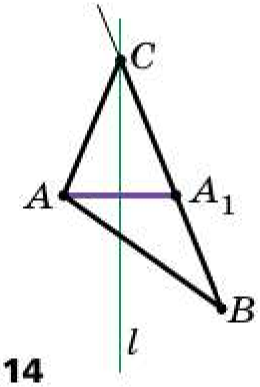


Рис. 20.14

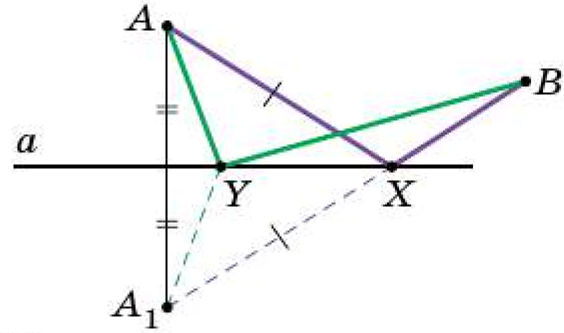


Рис. 20.15

Задача 1. Начертили неравнобедренный треугольник ABC. Провели прямую l, содержащую биссектрису угла C. Потом рисунок стёрли, оставив только точки A и B и прямую l. Восстановите треугольник ABC.

Решение. Так как прямая l является осью симметрии угла ACB, то точка A_1, где $A_1 = S_l(A)$, принадлежит лучу CB. Тогда пересечением прямых l и BA_1 является вершина C искомого треугольника ABC (рис. 20.14). ■

Задача 2. Точки A и B лежат в одной полуплоскости относительно прямой a. Найдите на прямой a такую точку X, чтобы сумма $AX + XB$ была наименьшей.

Решение. Пусть $S_a(A) = A_1$. Покажем, что искомой точкой X является точка пересечения прямых A_1B и a.

Пусть Y — произвольная точка прямой a, отличная от точки X (рис. 20.15), отрезки A_1X и A_1Y — образы отрезков AX и AY при симметрии относительно прямой a соответственно. Тогда $AX = A_1X$, $AY = A_1Y$.

Имеем $AX + BX = A_1X + BX = A_1B < A_1Y + YB = AY + YB$. ■

Задача 3. Точка O принадлежит острому углу ABC (рис. 20.16). На сторонах BA и BC угла найдите такие точки E и F, чтобы периметр треугольника OEF был наименьшим.

Решение. Пусть $S_{BA}(O) = O_1$, $S_{BC}(O) = O_2$ и прямая O_1O_2 пересекает стороны BA и BC в точках E и F соответственно (рис. 20.17). Докажем, что точки E и F — искомые.

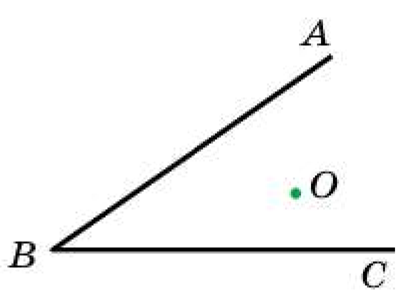


Рис. 20.16

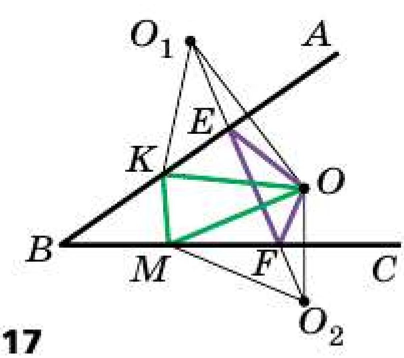


Рис. 20.17

Заметим, что отрезки EO_1 и EO симметричны относительно прямой BA. Следовательно, $EO_1 = EO$. Аналогично $FO = FO_2$. Тогда периметр треугольника OEF равен длине отрезка O_1O_2.

Покажем, что построенный треугольник имеет наименьший периметр из возможных. Рассмотрим треугольник KOM, где K и M — произвольные точки соответственно лучей BA и BC, причём точка K не совпадает с точкой E или точка M не совпадает с точкой F. Понятно, что $KO = KO_1$ и $MO = MO_2$. Тогда периметр треугольника KOM равен сумме $O_1K + KM + MO_2$. Однако $O_1K + KM + MO_2 > O_1O_2$. ■

Задача 4. На сторонах AB, BC и CA остроугольного треугольника ABC найдите такие точки M, N и P соответственно, чтобы периметр треугольника MNP был наименьшим.

Решение. Пусть P — произвольная точка стороны AC треугольника ABC, $S_{AB}(P) = P_1$, $S_{BC}(P) = P_2$. Прямая P_1P_2 пересекает стороны AB и BC соответственно в точках M и N (рис. 20.18). Из решения задачи 3 следует, что из всех треугольников, для которых точка P фиксирована, а точки M и N принадлежат сторонам AB и BC, у треугольника MNP периметр является наименьшим. Этот периметр равен длине отрезка P_1P_2.

Заметим, что EF — средняя линия треугольника PP_1P_2. Тогда $EF = \frac{1}{2}P_1P_2$.

Поскольку $\angle BEP + \angle BFP = 180°$, то точки P, E, B, F лежат на одной окружности с диаметром BP. Отсюда $EF = BP \sin B$. Следовательно, длина отрезка EF будет наименьшей при наименьшей длине отрезка BP, т. е. тогда, когда BP — высота треугольника ABC.

На рисунке 20.19 отрезок BP — высота треугольника ABC. Алгоритм построения треугольника MNP понятен из рисунка.

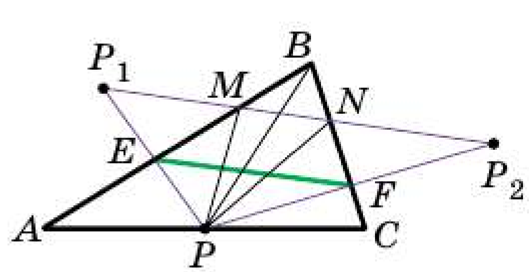


Рис. 20.18

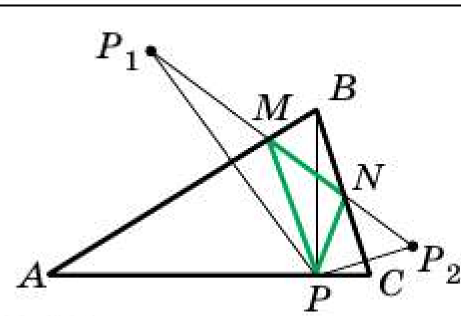


Рис. 20.19

Из построения следует, что периметр любого другого треугольника, вершины которого лежат на сторонах треугольника ABC, больше, чем периметр треугольника MNP. Следовательно, искомый треугольник единственный — это построенный треугольник MNP.

Можно показать (сделайте это самостоятельно), что точки M и N являются основаниями высот, проведённых соответственно из вершин C и A треугольника ABC.

Следовательно, вершины искомого треугольника — это основания высот данного треугольника ABC. Такой треугольник называют **ортоцентрическим**. ■

1. Какие точки называют симметричными относительно прямой l? Как называют прямую l?
2. Какие фигуры называют симметричными относительно прямой l?
3. Сформулируйте свойство осевой симметрии.
4. Каким свойством обладают фигуры, симметричные относительно прямой?
5. О какой фигуре говорят, что она имеет ось симметрии?
6. Приведите примеры фигур, имеющих ось симметрии.

Практические задания

20.1. Постройте образы фигур, изображённых на рисунке 20.20, при симметрии относительно прямой l.

20.2. Начертите треугольник. Постройте треугольник, симметричный ему относительно прямой, содержащей одну из его средних линий.

20.3. Точки A и B симметричны относительно прямой l (рис. 20.21). Постройте прямую l.

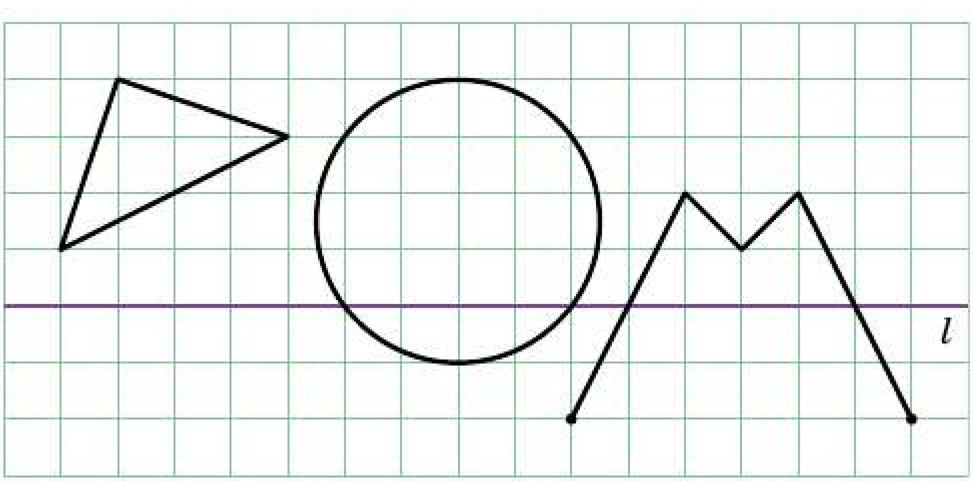


Рис. 20.20

Рис. 20.21

20.4. Проведите пересекающиеся прямые a и a_1. Постройте прямую, относительно которой прямая a_1 будет симметрична прямой a. Сколько решений имеет задача?

20.5. Проведите параллельные прямые a и a_1. Постройте прямую, относительно которой прямая a_1 будет симметрична прямой a.

20.6. Постройте ромб $ABCD$ по его вершинам B и C и прямой l, содержащей его диагональ BD (рис. 20.22).

20.7. Постройте равнобедренный треугольник ABC по вершине A, точке K, принадлежащей боковой стороне BC, и прямой, содержащей высоту, проведённую к основанию AB (рис. 20.23).

20.8. Окружности с центрами O_1 и O_2 имеют две общие точки (рис. 20.24). С помощью только циркуля постройте окружности, симметричные данным относительно прямой AB.

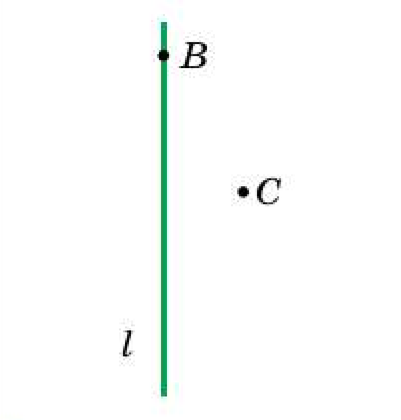


Рис. 20.22

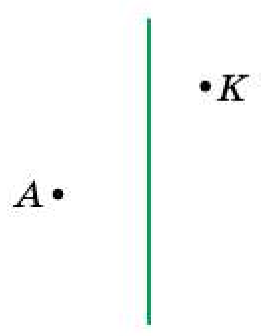


Рис. 20.23

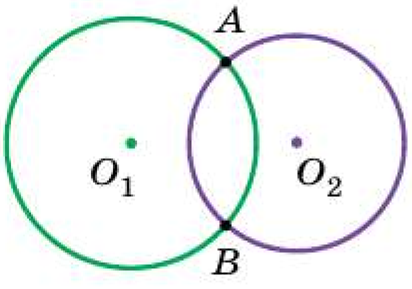


Рис. 20.24

Упражнения

20.9. Прямая l проходит через середину отрезка AB. Обязательно ли точки A и B являются симметричными относительно прямой l?

20.10. Докажите, что прямая, проходящая через середины оснований равнобокой трапеции, является её осью симметрии.

20.11. Докажите, что прямая, содержащая медиану равнобедренного треугольника, проведённую к основанию, является его осью симметрии.

20.12. На рисунке 20.25 изображены равнобедренный треугольник ABC и прямая l, содержащая его высоту, проведённую к основанию AC. Отрезки AM и CN — медианы треугольника. Укажите образы точек A и B, медианы CN и стороны AC при симметрии относительно прямой l.

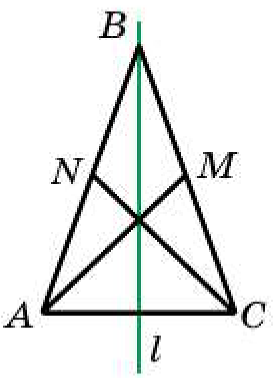


Рис. 20.25

20.13. На рисунке 20.26 изображены равнобокая трапеция $ABCD$ и прямая l, проходящая через середины её оснований. Укажите образы точек B и D, диагонали AC и основания BC при симметрии относительно прямой l.

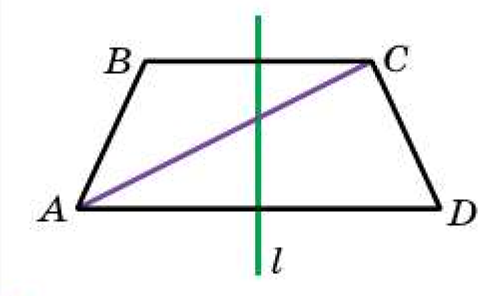


Рис. **20.26**

20.14. Докажите, что прямые, содержащие диагонали ромба, являются его осями симметрии.

20.15. Докажите, что прямые, проходящие через середины противолежащих сторон прямоугольника, являются его осями симметрии.

20.16. Докажите, что прямая, содержащая биссектрису угла, является его осью симметрии.

20.17. Окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Докажите, что точки A и B симметричны относительно прямой O_1O_2.

20.18. Найдите координаты точек, симметричных точкам A $(-2; 1)$ и B $(0; -4)$ относительно осей координат.

20.19. Точки A $(x; 3)$ и B $(-2; y)$ симметричны относительно: 1) оси абсцисс; 2) оси ординат. Найдите x и y.

20.20. Образом прямой a при симметрии относительно прямой l является сама прямая a. Каково взаимное расположение прямых a и l?

20.21. Докажите, что треугольник, имеющий ось симметрии, является равнобедренным.

20.22. Докажите, что треугольник, имеющий две оси симметрии, является равносторонним. Может ли треугольник иметь ровно две оси симметрии?

20.23. Докажите, что если параллелограмм имеет ровно две оси симметрии, то он является или прямоугольником, или ромбом.

20.24. Докажите, что если четырёхугольник имеет четыре оси симметрии, то он является квадратом.

20.25. Точка M принадлежит прямому углу ABC (рис. 20.27). Точки M_1 и M_2 — образы точки M при симметрии относительно прямых BA и BC соответственно. Докажите, что точки M_1, B, M_2 лежат на одной прямой.

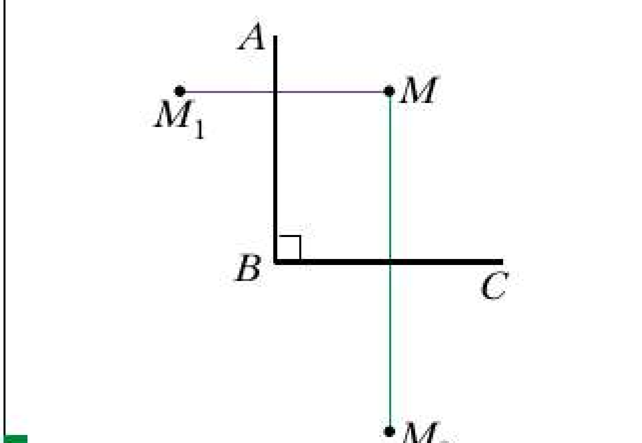


Рис. **20.27**

20.26. Найдите координаты точек, симметричных точкам $A\ (-2;\ 0)$ и $B\ (3;\ -1)$ относительно прямой, содержащей биссектрисы: 1) первого и третьего координатных углов; 2) второго и четвёртого координатных углов.

20.27. Точки $A\ (x;\ -1)$ и $B\ (y;\ 2)$ симметричны относительно прямой, содержащей биссектрисы первого и третьего координатных углов. Найдите x и y.

20.28. Центр окружности, вписанной в четырёхугольник, лежит на его диагонали. Докажите, что этот четырёхугольник имеет ось симметрии.

20.29. Докажите, что выпуклый четырёхугольник, имеющий ось симметрии, является или вписанным в окружность, или описанным около окружности.

20.30. Докажите, что точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно прямых, содержащих его стороны, лежат на описанной окружности этого треугольника.

◆ ◆ ◆

20.31. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) медиана AM, проведённая к меньшему катету, образует с бóльшим катетом угол $15°$. Найдите площадь треугольника ABC, если $AM = m$.

20.32. Точки A и B лежат в разных полуплоскостях относительно прямой a. На прямой a найдите такую точку X, чтобы прямая a содержала биссектрису угла AXB.

20.33. Точки A и B лежат в одной полуплоскости относительно прямой a. Найдите на прямой a такую точку X, чтобы лучи XA и XB образовывали с этой прямой равные углы.

20.34. Точки A и B лежат в разных полуплоскостях относительно прямой a. Найдите на прямой a такую точку X, чтобы величина $|AX - XB|$ была наибольшей.

20.35. Докажите, что из всех треугольников с данным основанием и данной высотой, проведённой к этому основанию, равнобедренный имеет наименьший периметр.

20.36. Точки M и N принадлежат углу ABC. Найдите на сторонах этого угла такие точки E и F, чтобы периметр четырёхугольника $EMNF$ был наименьшим.

20.37. Через вершину A треугольника ABC и точку D, лежащую на стороне BC, проведена прямая. Известно, что $\angle ADB \neq 90°$. Найдите на этой прямой такую точку X, из которой отрезки BD и DC были бы видны под одинаковыми углами.

20.38. Постройте треугольник ABC, если даны прямая AB и серединные перпендикуляры сторон BC и CA.

20.39. Постройте треугольник ABC, если даны вершина A и прямые, на которых лежат биссектрисы углов B и C.

20.40. Постройте параллелограмм $ABCD$ по вершине D и серединным перпендикулярам сторон AB и BC.

20.41. На биссектрисе внешнего угла C треугольника ABC отмечена точка M, отличная от точки C. Докажите, что $MA + MB > CA + CB$.

20.42. Точки A, B и C — вершины неравнобедренного треугольника. Сколько существует таких точек D, что четырёхугольник с вершинами A, B, C и D имеет хотя бы одну ось симметрии?

20.43. Постройте треугольник ABC по двум сторонам AB и AC ($AB < AC$) и разности углов B и C.

20.44. Постройте трапецию по боковым сторонам, основанию и разности углов при этом основании.

20.45. Точки C и D лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB (рис. 20.28). На прямой AB найдите такую точку X, что $\angle AXC = \frac{1}{2} \angle DXB$.

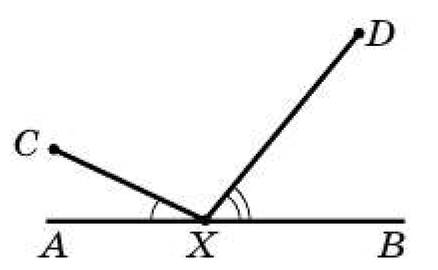


Рис. 20.28

20.46. Точки C и D лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB. На прямой AB найдите такую точку X, что $|\angle AXC - \angle BXD| = 90°$.

20.47. Докажите, что площадь выпуклого четырёхугольника $ABCD$ не больше $\frac{1}{2}(AB \cdot CD + BC \cdot AD)$.

20.48. Постройте четырёхугольник $ABCD$ по четырём его сторонам, если известно, что его диагональ AC является биссектрисой угла A.

20.49. В окружность вписан остроугольный треугольник. Постройте шестиугольник, вписанный в эту окружность, площадь которого в два раза больше площади данного треугольника.

20.50. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ угол BAD равен $60°$. Известно, что точки, симметричные точке A относительно прямых CB и CD, лежат на прямой BD. Найдите угол BCD.

20.51. В прямоугольной трапеции $ABCD$ ($\angle A = \angle B = 90°$) биссектриса угла ADC пересекает сторону AB в точке M. Найдите угол CMD, если $CD = AD + BC$.

20.52. Точка M — середина стороны BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Известно, что $\angle AMD = 120°$. Докажите, что $AB + \frac{1}{2} BC + CD \geqslant AD$.

20.53. Стороны выпуклого пятиугольника $ABCDE$ равны. Известно, что $\angle ACE = \frac{1}{2}\angle BCD$. Найдите угол ACE.

§ 21 Центральная симметрия

Определение

Точки A и A_1 называют симметричными относительно точки O, если точка O является серединой отрезка AA_1 (рис. 21.1)**. Точку O считают симметричной самой себе.**

Например, точки A и A_1, у которых как абсциссы, так и ординаты — противоположные числа, симметричны относительно начала координат (рис. 21.2).

Рассмотрим фигуру F и точку O. Каждой точке X фигуры F поставим в соответствие симметричную ей относительно точки O точку X_1. В результате такого преобразования фигуры F получим фигуру F_1 (рис. 21.3). Такое преобразование фигуры F называют **центральной симметрией относительно точки** O и обозначают так: S_O. Пишут: $S_O(F) = F_1$. Точку O называют **центром симметрии**. Также говорят, что фигуры F и F_1 **симметричны относительно точки** O.

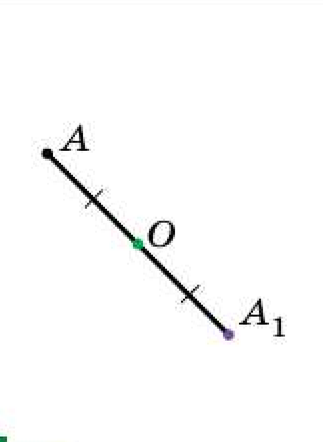


Рис. 21.1

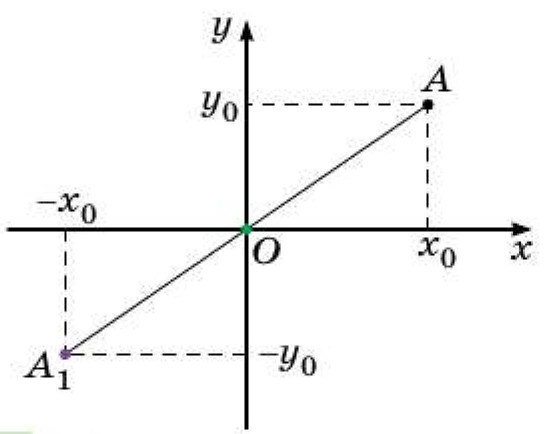


Рис. 21.2

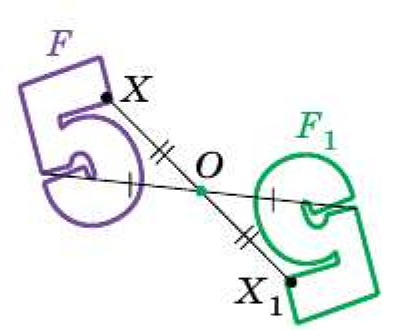


Рис. 21.3

Теорема 21.1

(свойство центральной симметрии)

Центральная симметрия является движением.

Доказательство

Выберем систему координат так, чтобы центр симметрии совпал с началом координат. Пусть точки A $(x_1;\ y_1)$ и B $(x_2;\ y_2)$ принадлежат фигуре F. Точки $A_1(-x_1; -y_1)$ и $B_1(-x_2; -y_2)$ — соответственно их образы при центральной симметрии относительно начала координат.

Имеем:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(-x_2 - (-x_1))^2 + (-y_2 - (-y_1))^2} = \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2} = AB.$$

Следовательно, $AB = A_1B_1$, т. е. центральная симметрия сохраняет расстояние между точками. ■

Следствие 1

Если $S_O(F) = F_1$, то $F = F_1$.

Следствие 2

Центральная симметрия является обратимым преобразованием. Если $S_O(F) = F_1$, то $S_O(F_1) = F$, т. е. $S_O \circ S_O(F) = F$.

Определение

Фигуру F называют симметричной относительно точки O, если $S_O(F) = F$.

Точку O называют **центром симметрии фигуры**. Также говорят, что **фигура имеет центр симметрии.**

Приведём примеры фигур, имеющих центр симметрии.

Центром симметрии отрезка является его середина (рис. 21.4).

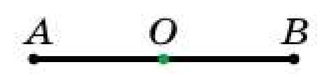


Рис. 21.4

Точка пересечения диагоналей параллелограмма является его центром симметрии (рис. 21.5).

Существуют фигуры, имеющие бесконечно много центров симметрии. Например, каждая точка прямой является её центром симметрии.

Также бесконечно много центров симметрии имеет фигура, состоящая из двух параллельных прямых. Любая точка прямой, равноудалённой от двух данных, является центром симметрии рассматриваемой фигуры (рис. 21.6).

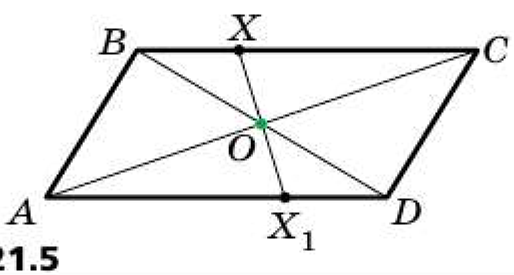


Рис. 21.5

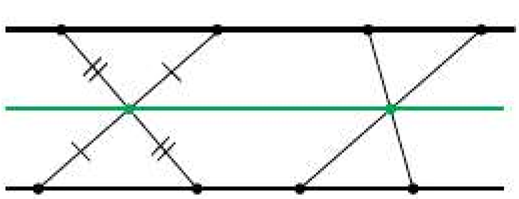


Рис. 21.6

Задача 1. Докажите, что образом данной прямой l при симметрии относительно точки O, не принадлежащей прямой l, является прямая, параллельная данной.

Решение. Поскольку центральная симметрия — это движение, то образом прямой l будет прямая. Для построения прямой достаточно знать две любые её точки.

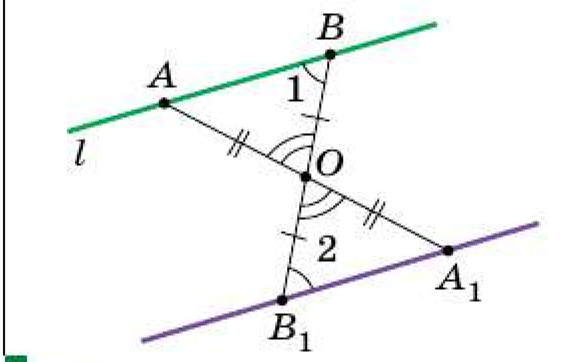


Рис. **21.7**

Выберем на прямой l произвольные точки A и B (рис. 21.7). Пусть точки A_1 и B_1 — их образы при центральной симметрии относительно точки O, т. е. $S_O(A) = A_1$, $S_O(B) = B_1$. Тогда прямая A_1B_1 — образ прямой l.

Поскольку $AO = OA_1$, $BO = OB_1$, углы AOB и A_1OB_1 равны как вертикальные, то треугольники AOB и A_1OB_1 равны по первому признаку равенства треугольников. Отсюда $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 21.7). Следовательно, $l \parallel A_1B_1$. ■

Мы привели примеры фигур, имеющих ровно один центр симметрии или бесконечно много центров симметрии. Возникает естественный вопрос: может ли фигура иметь ровно два, ровно три и вообще, любое конечное, отличное от 1, количество центров симметрии? Ответ на этот вопрос отрицательный. Вы можете доказать это, если примете участие в работе над проектом «Преобразования плоскости».

Задача 2. Точка M принадлежит углу ABC (рис. 21.8). На сторонах BA и BC угла постройте такие точки E и F, чтобы точка M была серединой отрезка EF.

Решение. Пусть прямая A_1B_1 — образ прямой AB при центральной симметрии относительно точки M (рис. 21.9). Обозначим F — точку пересечения прямых A_1B_1 и BC.

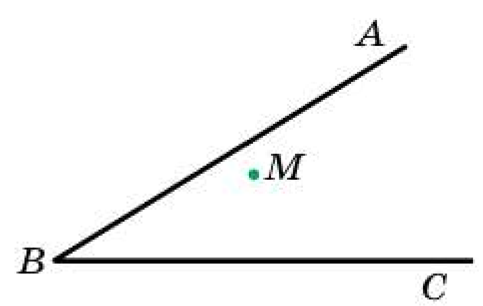


Рис. **21.8**

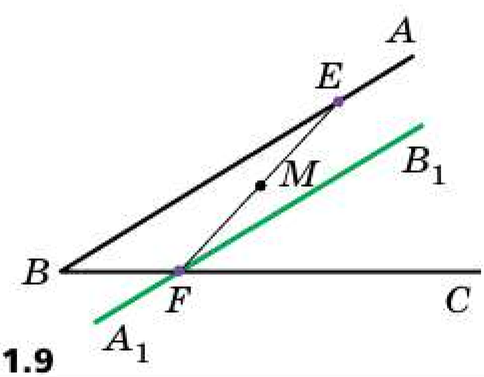


Рис. **21.9**

Найдём прообраз точки F. Очевидно, что он лежит на прямой AB. Поэтому достаточно найти точку пересечения прямых FM и AB. Обозначим эту точку E. Тогда E и F — искомые точки. ■

Задача 3. Докажите, что:

1) композиция двух центральных симметрий является параллельным переносом;

2) композиция центральной симметрии и параллельного переноса является центральной симметрией;

3) композиция чётного количества центральных симметрий является параллельным переносом;

4) композиция нечётного количества центральных симметрий является центральной симметрией.

Решение. 1) Рассмотрим две центральные симметрии с центрами $O_1\,(a_1;\, b_1)$ и $O_2\,(a_2;\, b_2)$. Пусть $A\,(x;\, y)$ — произвольная точка плоскости и $S_{O_1}(A) = A_1$, $S_{O_2}(A_1) = A_2$. Найдём координаты точек A_1 и A_2. Имеем: $A_1\,(2a_1 - x;\, 2b_1 - y)$ и $A_2\,(2a_2 - 2a_1 + x;\, 2b_2 - 2b_1 + y)$. Отсюда получаем, что вектор $\overrightarrow{AA_2}$ при заданных точках O_1 и O_2 имеет постоянные координаты. Следовательно, точка A_2 является образом точки A при параллельном переносе на вектор с координатами $(2a_2 - 2a_1;\, 2b_2 - 2b_1)$.

2) Рассмотрим композицию $T_{\vec{a}} \circ S_O$. Выберем систему координат так, чтобы центр симметрии, точка O, имел координаты $(0;\, 0)$. Пусть при этом вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(a;\, b)$. Рассмотрим произвольную точку $A\,(x;\, y)$ координатной плоскости.

Имеем: $S_O(A) = A_1\,(-x;\, -y)$; $T_{\vec{a}}(A_1) = A_2\,(-x + a;\, -y + b)$. Следовательно, точка A_2 является образом точки A при центральной симметрии с центром $O_1\left(\dfrac{a}{2};\, \dfrac{b}{2}\right)$. Аналогично можно показать, что композиция $S_O \circ T_{\vec{a}}$ является центральной симметрией с центром $O_2\left(-\dfrac{a}{2};\, -\dfrac{b}{2}\right)$.

Используя пункты 1 и 2 задачи, докажите пункты 3 и 4 самостоятельно. ■

Задача 4. Постройте пятиугольник $ABCDE$, если даны точки M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, являющиеся серединами его сторон AB, BC, CD, DE, EA соответственно.

Решение. Имеем: $S_{M_1}(A) = B$, $S_{M_2}(B) = C$, $S_{M_3}(C) = D$, $S_{M_4}(D) = E$, $S_{M_5}(E) = A$. Следовательно, $S_{M_5} \circ S_{M_4} \circ S_{M_3} \circ S_{M_2} \circ S_{M_1}(A) = A$. Но композиция нечётного количества центральных симметрий является центральной симметрией. А при центральной симметрии только одна точка совпадает со своим образом — это центр симметрии. Следовательно, $S_{M_5} \circ S_{M_4} \circ S_{M_3} \circ S_{M_2} \circ S_{M_1} = S_A$.

Теперь вершину A искомого пятиугольника можно построить следующим образом. Пусть X — произвольная точка. Построим точки X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 такие, что $X_1 = S_{M_1}(X)$, $X_2 = S_{M_2}(X_1)$, $X_3 = S_{M_3}(X_2)$, $X_4 = S_{M_4}(X_3)$, $X_5 = S_{M_5}(X_4)$. Точка A является серединой отрезка XX_5. Дальнейшее построение очевидно. ■

Изучая окружающий мир, мы часто встречаемся с симметрией. Примеры проявления симметрии в природе показаны на рисунке 21.10. Объекты, имеющие ось или центр симметрии, легко воспринимаются и радуют взгляд. Недаром в Древней Греции слово «симметрия» служило синонимом слов «гармония», «красота».

Рис. 21.10

Идея симметрии широко используется в изобразительном искусстве, архитектуре и технике (рис. 21.11).

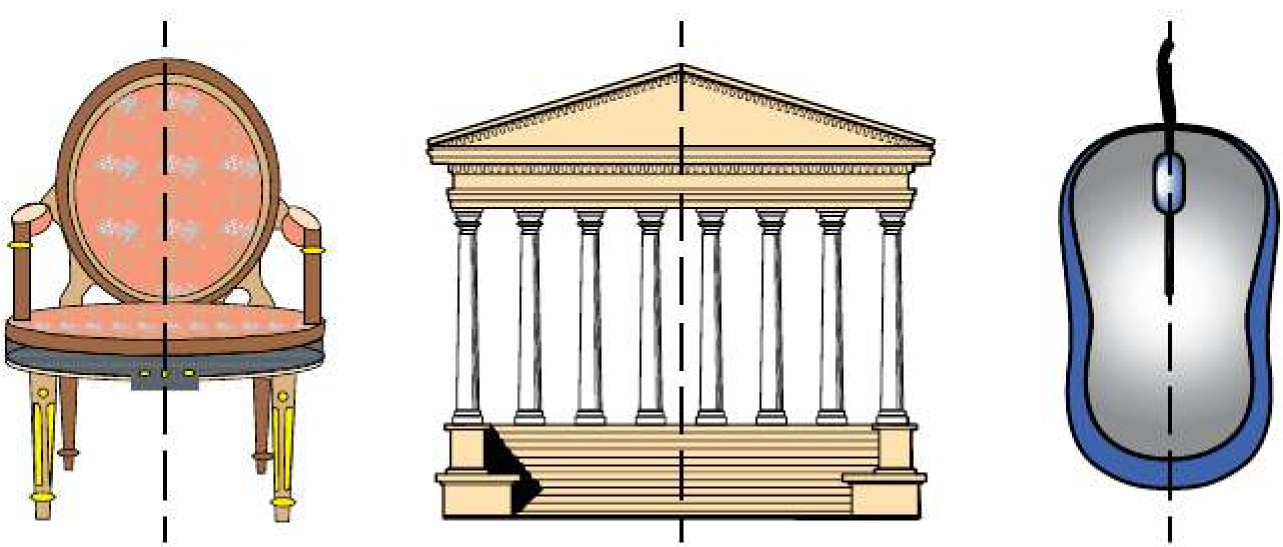


Рис. 21.11

1. Какие точки называют симметричными относительно точки O? Как называют точку O?
2. Какие фигуры называют симметричными относительно точки O?

3. Сформулируйте свойство центральной симметрии.
4. Каким свойством обладают фигуры, симметричные относительно точки?
5. О какой фигуре говорят, что она имеет центр симметрии?
6. Приведите примеры фигур, имеющих центр симметрии.

Практические задания

21.1. Начертите треугольник ABC и отметьте точку O, не принадлежащую ему. Постройте треугольник, симметричный данному относительно точки O.

21.2. Начертите треугольник ABC. Постройте треугольник, симметричный данному относительно середины стороны AB.

21.3. Начертите окружность и отметьте на ней точку. Постройте окружность, симметричную данной относительно отмеченной точки.

21.4. Постройте параллелограмм $ABCD$ по его вершинам A и B и точке O пересечения его диагоналей (рис. 21.12).

21.5. Даны две параллельные прямые a и b (рис. 21.13). Найдите точку, относительно которой прямая a будет симметричной прямой b. Сколько решений имеет задача?

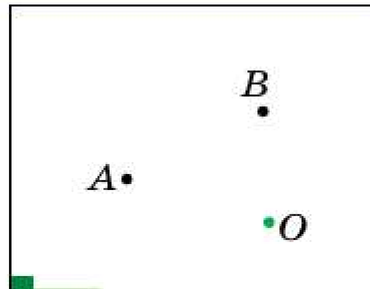


Рис. 21.12

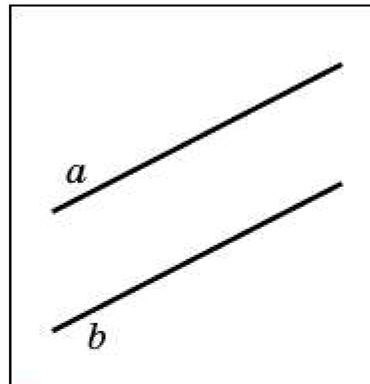


Рис. 21.13

Упражнения

21.6. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 21.14). Точка M — середина стороны BC. Укажите образы точек A, D и M, стороны CD, диагонали BD при симметрии относительно точки O.

21.7. Докажите, что точка пересечения диагоналей параллелограмма является его центром симметрии.

21.8. Докажите, что окружность имеет центр симметрии.

21.9. Точки A_1 и B_1 являются образами соответственно точек A и B при симметрии относительно точки, не принадлежащей прямой AB. Докажите, что четырёхугольник ABA_1B_1 — параллелограмм.

21.10. Найдите координаты точек, симметричных точкам A (3; –1) и B (0; –2) относительно: 1) начала координат; 2) точки M (2; –3).

21.11. Докажите, что образом прямой, проходящей через центр симметрии, является сама эта прямая.

21.12. Точки $A\ (x;\ -2)$ и $B\ (1;\ y)$ симметричны относительно: 1) начала координат; 2) точки $M\ (-1;\ 3)$. Найдите x и y.

21.13. Докажите, что треугольник не имеет центра симметрии.

21.14. Докажите, что луч не имеет центра симметрии.

21.15. Докажите, что фигура, состоящая из двух равных параллельных отрезков, имеет центр симметрии.

21.16. Докажите, что если четырёхугольник имеет центр симметрии, то он является параллелограммом.

21.17. Вершины одного параллелограмма лежат на сторонах другого: по одной вершине на каждой стороне. Докажите, что точки пересечения диагоналей этих параллелограммов совпадают.

21.18. Окружности с центрами O_1 и O_2 симметричны относительно точки O. Прямая, проходящая через центр симметрии, пересекает первую окружность в точках A_1 и B_1, а вторую — в точках A_2 и B_2 (рис. 21.15). Докажите, что $A_1B_1 = A_2B_2$.

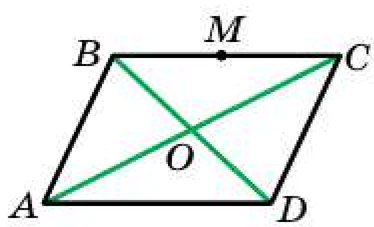


Рис. **21.14**

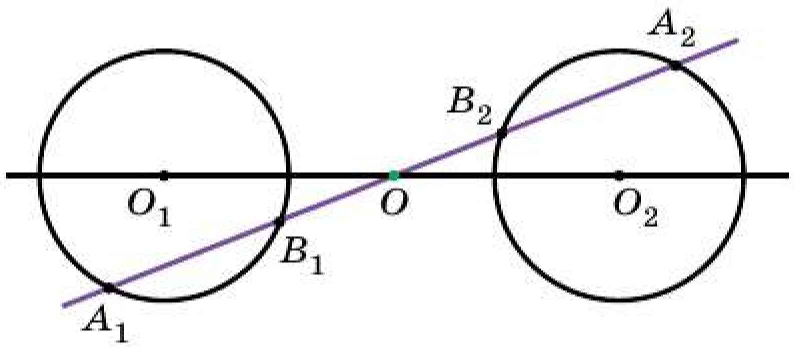


Рис. **21.15**

21.19. Даны окружность, прямая и точка. Постройте отрезок с серединой в данной точке, один из концов которого принадлежит данной окружности, а другой — данной прямой.

21.20. Даны две окружности и точка. Постройте отрезок с серединой в данной точке, концы которого принадлежат данным окружностям.

21.21. Даны прямая a и две окружности по разные стороны от неё. На прямой отмечен отрезок CD. Постройте треугольник ABC так, чтобы точки A и B лежали на данных окружностях, а отрезок CD был его медианой.

21.22. На противолежащих сторонах BC и AD параллелограмма $ABCD$ как на сторонах построены во внешнюю сторону равносторонние треугольники BMC и AND. Докажите, что точки M, O и N, где O — точка пересечения диагоналей, лежат на одной прямой.

21.23. На противолежащих сторонах параллелограмма как на сторонах во внешнюю сторону построены квадраты. Докажите, что прямая, соединяющая центры квадратов, проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма.

21.24. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что описанные окружности треугольников BOC и AOD касаются.

◆ ◆ ◆

21.25. Докажите, что если фигура имеет две перпендикулярные оси симметрии, то точка их пересечения является центром симметрии фигуры.

21.26. Точки A и C принадлежат острому углу, но не лежат на его сторонах. Постройте параллелограмм $ABCD$ так, чтобы точки B и D лежали на сторонах угла.

21.27. Постройте квадрат с центром в данной точке O и данными точками M и N на двух противолежащих сторонах или их продолжениях.

21.28. Постройте ромб, точкой пересечения диагоналей которого является данная точка, а три вершины принадлежат трём данным попарно непараллельным прямым.

21.29. Даны точка и три окружности. Постройте ромб, точкой пересечения диагоналей которого является данная точка, а три вершины лежат на трёх данных окружностях.

21.30. Даны параллелограмм $ABCD$ и точка M. Через точки A, B, C и D проведены прямые, параллельные прямым MC, MD, MA и MB соответственно. Докажите, что проведённые прямые пересекаются в одной точке.

21.31. Две окружности пересекаются в точке M. Проведите через точку M прямую, которая во второй раз пересекает данные окружности в точках A и B так, что $AM = MB$.

21.32. Точка C — середина отрезка AB. На луче CQ отметили точки P и M такие, что $PM = MQ$ (рис. 21.16). Докажите, что $AP + BQ > 2CM$.

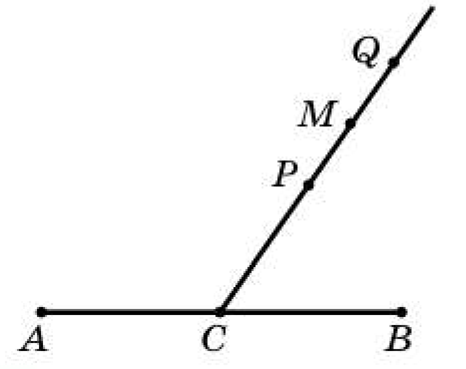


Рис. **21.16**

21.33. Докажите, что прямые, проведённые через середины сторон вписанного четырёхугольника перпендикулярно противолежащим сторонам, пересекаются в одной точке.

21.34. Окружность пересекает стороны BC, CA, AB треугольника ABC в точках A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2 соответственно. Докажите, что если прямые, перпендикулярные сторонам треугольника, проведённые через точки A_1, B_1 и C_1, пересекаются в одной точке, то и прямые, перпендикулярные сторонам треугольника, проведённые через точки A_2, B_2 и C_2, также пересекаются в одной точке.

21.35. Длина высоты AB прямоугольной трапеции $ABCD$ равна сумме длин оснований AD и BC. В каком отношении биссектриса угла ABC делит сторону CD?

21.36. Даны две концентрические окружности. Проведите прямую, на которой эти окружности отсекают три равных отрезка.

§ 22 Поворот

На рисунке 22.1 изображены точки O, X, X_1 и X_2 такие, что $OX_1 = OX_2 = OX$, $\angle X_1OX = \angle X_2OX = \alpha$. Говорят, что точка X_1 является образом точки X при **повороте вокруг центра O против часовой стрелки на угол α**. Также говорят, что точка X_2 — это образ точки X при **повороте вокруг центра O по часовой стрелке на угол α**.

Точку O называют **центром поворота**, угол α — **углом поворота**.

Рассмотрим фигуру F, точку O и угол α. Каждой точке X фигуры F поставим в соответствие точку X_1, являющуюся образом точки X при повороте вокруг центра O против часовой стрелки на угол α (если точка O принадлежит фигуре F, то ей сопоставляется она сама). В результате такого преобразования фигуры F получим фигуру F_1 (рис. 22.2). Такое преобразование фигуры F называют **поворотом вокруг центра O против часовой стрелки на угол α** и обозначают так: R_O^α. Пишут: $R_O^\alpha(F) = F_1$. Точку O называют **центром поворота**.

Аналогично определяют преобразование поворота фигуры F по часовой стрелке на угол α (рис. 22.3).

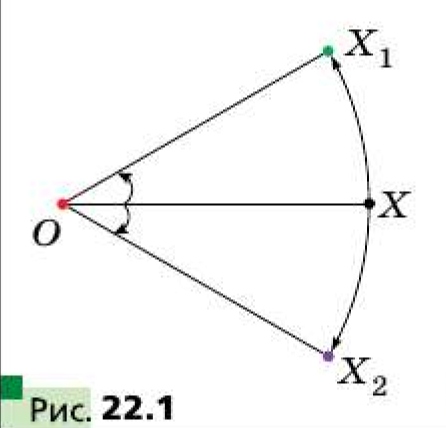


Рис. 22.1

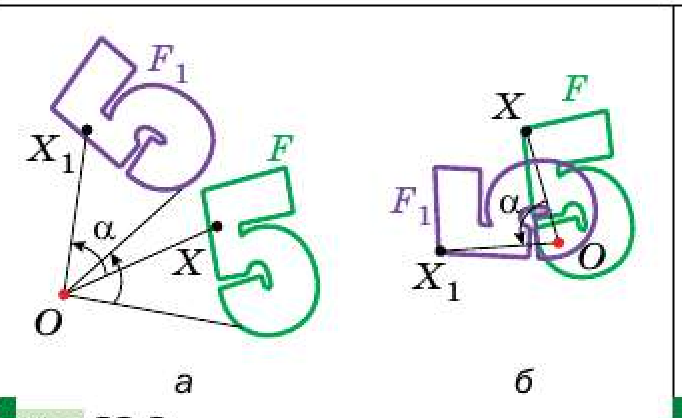


Рис. 22.2

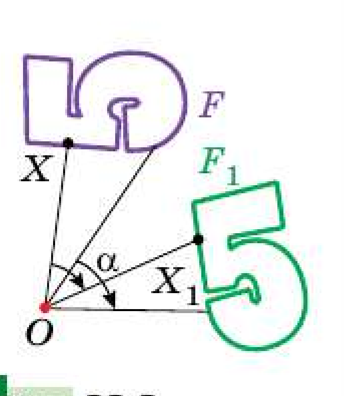


Рис. 22.3

Поворот по часовой стрелке обозначают так: $R_O^{-\alpha}$. Пишут: $R_O^{-\alpha}(F) = F_1$. Очевидно, что повороты R_O^{α} и $R_O^{-\alpha}$ являются взаимно обратными преобразованиями.

Заметим, что центральная симметрия является поворотом вокруг центра симметрии на угол $180°$ в любом из направлений.

Теорема 22.1

(свойство поворота)

Поворот является движением.

Докажите эту теорему самостоятельно.

Следствие

Если фигура F_1 — образ фигуры F при повороте, то $F = F_1$.

Пусть прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке O и $S_{l_1}(F) = F_1$, $S_{l_2}(F_1) = F_2$ (рис. 22.4). Наглядно очевидно, что фигура F_2 — это образ фигуры F при некотором повороте вокруг точки O.

Строгое обоснование этого факта даёт такая теорема.

Теорема 22.2

Композицией двух осевых симметрий с непараллельными осями является поворот вокруг точки пересечения осей.

Составим план доказательства, который вы сможете реализовать самостоятельно.

Пусть $l_1 \cap l_2 = O$ и угол между прямыми l_1 и l_2 равен α (рис. 22.5). Докажите, что $S_{l_2} \circ S_{l_1} = R_O^{2\alpha}$.

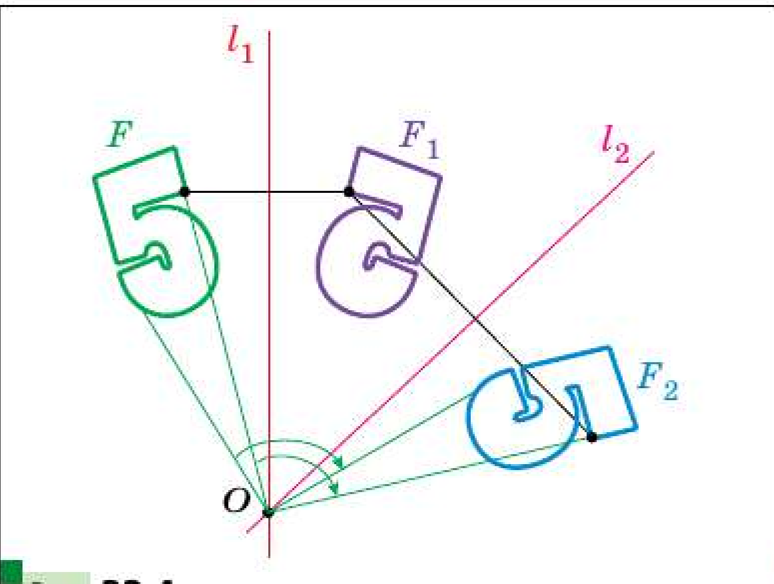


Рис. 22.4

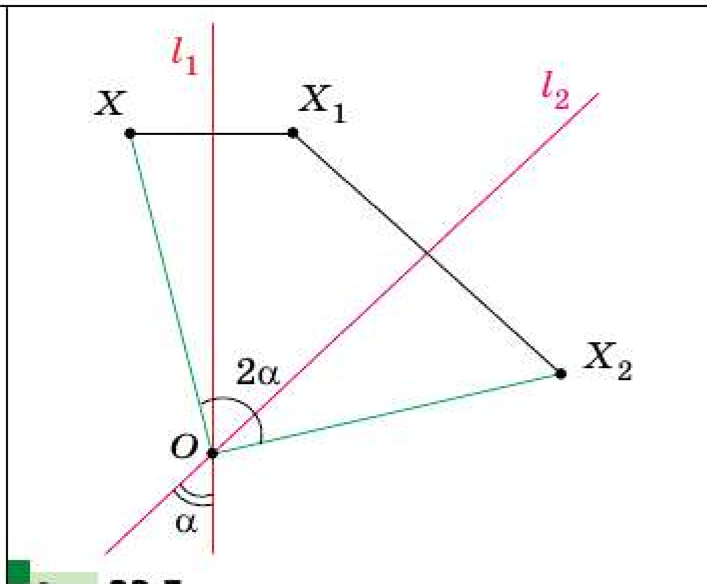


Рис. 22.5

Для этого рассмотрите произвольную точку X фигуры F. Пусть $S_{l_1}(X) = X_1$, $S_{l_2}(X_1) = X_2$. Докажите, что $XO = X_2O$ и $\angle XOX_2 = 2\alpha$.

Теоремы 20.4 и 22.2 показывают, что параллельный перенос, поворот, а следовательно, и центральную симметрию можно представить в виде композиции осевых симметрий. Таким образом, осевая симметрия играет роль базового движения для всех известных вам видов движений фигур. Более того, справедлива следующая теорема.

Теорема 22.3

Любое движение фигуры является композицией не более чем трёх осевых симметрий.

С доказательством этой теоремы вы можете ознакомиться, если примете участие в работе над проектом «Преобразования плоскости».

Задача 1. На рисунке 22.6 изображены прямая a и точка O. Постройте образ прямой a при повороте вокруг точки O против часовой стрелки на угол 45°.

Решение. Так как поворот — это движение, то образом прямой a будет прямая. Для построения прямой достаточно знать две любые её точки. Выберем на прямой a произвольные точки A и B (рис. 22.6). Построим точки A_1 и B_1 — их образы при повороте вокруг точки O против часовой стрелки на угол 45°. Тогда прямая A_1B_1 — образ прямой a. ■

Задача 2. Точка P принадлежит углу ABC (рис. 22.7). Постройте равносторонний треугольник, одна вершина которого является точкой P, а две другие принадлежат сторонам BA и BC.

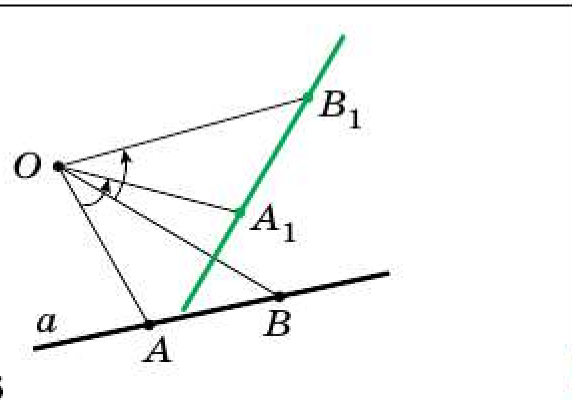


Рис. 22.6

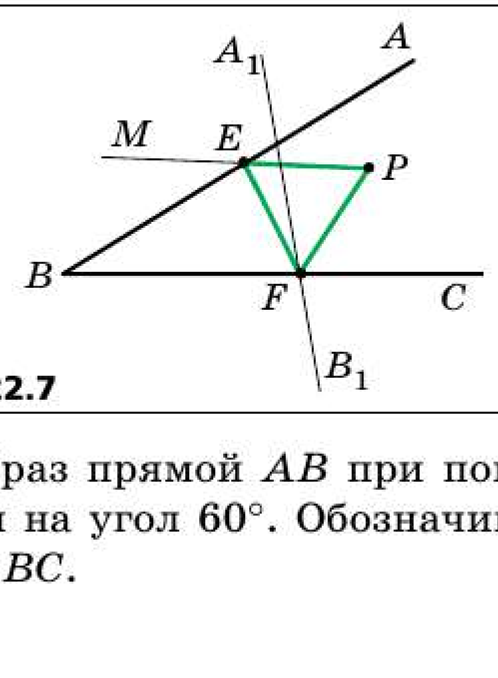


Рис. 22.7

Решение. Пусть прямая A_1B_1 — образ прямой AB при повороте вокруг центра P против часовой стрелки на угол 60°. Обозначим буквой F точку пересечения прямых A_1B_1 и BC.

Найдём прообраз точки F при выполненном повороте. Очевидно, что он лежит на прямой AB. Поэтому достаточно построить угол MPF, равный $60°$. Пусть прямые MP и AB пересекаются в точке E. Эта точка и является прообразом точки F.

Имеем: $PF = PE$ и $\angle FPE = 60°$. Следовательно, треугольник EPF равносторонний, а точки F и E — искомые. ■

Задача 3. В треугольнике ABC, каждый из углов которого меньше $120°$, найдите такую точку T, чтобы сумма $TA + TB + TC$ была наименьшей.

Решение. Пусть T — произвольная точка данного треугольника ABC (рис. 22.8). Рассмотрим поворот с центром A на угол $60°$ по часовой стрелке. Пусть точки T_1 и C_1 — образы точек T и C соответственно. Поскольку поворот является движением, то $T_1C_1 = TC$. Очевидно, что треугольник ATT_1 равносторонний. Тогда $AT = TT_1$.

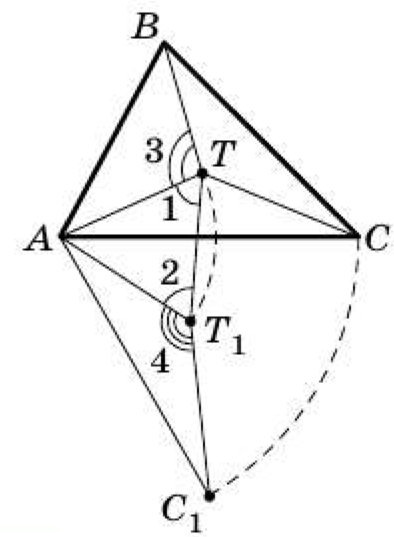


Рис. 22.8

Имеем: $TA + TB + TC = TT_1 + TB + T_1C_1$.

Понятно, что сумма $TT_1 + TB + T_1C_1$ будет наименьшей, если точки B, T, T_1, C_1 лежат на одной прямой. Так как $\angle 1 = \angle 2 = 60°$, то это условие будет выполняться тогда, когда $\angle 3 = \angle 4 = 120°$.

Поскольку угол AT_1C_1 — образ угла ATC при указанном повороте, то должно выполняться равенство $\angle ATC = 120°$.

Следовательно, точки B, T, T_1 и C_1 будут принадлежать одной прямой тогда и только тогда, когда $\angle ATB = \angle ATC = 120°$. Отсюда $\angle BTC = 120°$.

Таким образом, сумма $TA + TB + TC$ будет наименьшей, если $\angle ATB = \angle BTC = \angle ATC = 120°$.

Найти точку T можно, например, построив ГМТ, из которых отрезки AB и AC видно под углами $120°$ (рис. 22.9).

Понятно, что если один из углов треугольника ABC не меньше $120°$, то точка пересечения построенных дуг не будет находиться внутри треугольника. Можно показать, что в треугольнике с углом, не меньшим $120°$, точка, сумма расстояний от которой до вершин треугольника является наименьшей, совпадает с вершиной тупого угла. ■

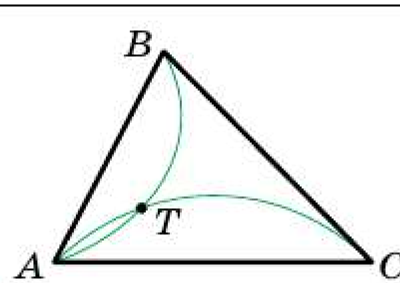


Рис. 22.9

1. Опишите преобразование поворот вокруг точки.
2. Сформулируйте свойство поворота.
3. Каким свойством обладают фигуры, если одна из них является образом другой при повороте?

Практические задания

22.1. Постройте образ отрезка AB при повороте вокруг центра O против часовой стрелки на угол 45° (рис. 22.10).

22.2. Постройте образ треугольника ABC при повороте вокруг центра O по часовой стрелке на угол 90° (рис. 22.11).

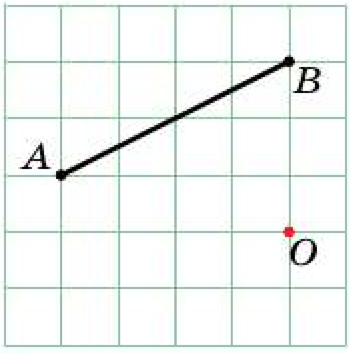


Рис. 22.10

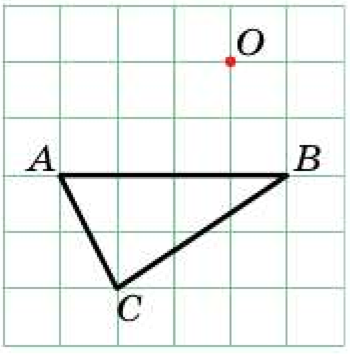


Рис. 22.11

22.3. На рисунке 22.12 изображены два равных отрезка AB и BC таких, что $\angle ABC = 60°$. Найдите точку O такую, чтобы отрезок AB был образом отрезка BC при повороте вокруг точки O против часовой стрелки на угол 120°.

22.4. На рисунке 22.13 изображены два равных отрезка MN и NK таких, что $\angle MNK = 90°$. Найдите точку O такую, чтобы отрезок NK был образом отрезка MN при повороте вокруг точки O по часовой стрелке на угол 90°.

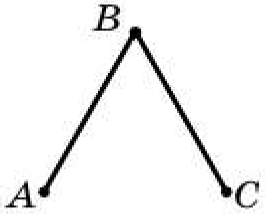


Рис. 22.12

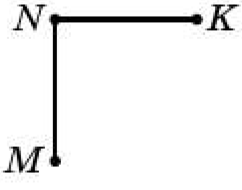


Рис. 22.13

22.5. Постройте фигуру, не имеющую осей симметрии, образом которой является сама эта фигура при повороте вокруг некоторой точки: 1) на угол 90°; 2) на угол 120°.

Упражнения

22.6. На рисунке 22.14 изображены фигуры, составленные из равных полукругов. Какие из этих фигур при повороте вокруг точки O на угол α, где $0° < \alpha \leqslant 180°$, совпадают со своими образами?

Рис. 22.14

22.7. Медианы равностороннего треугольника ABC пересекаются в точке O (рис. 22.15). Укажите образы точек C, C_1 и O, стороны BC, медианы BB_1, отрезка OC_1, треугольника $A_1B_1C_1$ при повороте вокруг точки O против часовой стрелки на угол 120°.

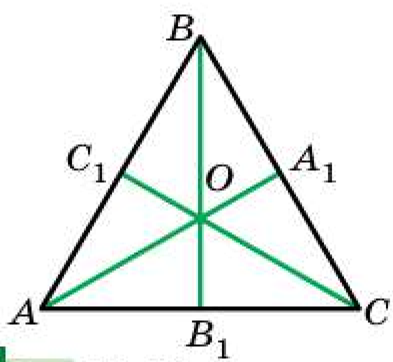


Рис. 22.15

22.8. Точка O — центр правильного шестиугольника $ABCDEF$ (рис. 22.16). Укажите образы стороны AF, диагонали BF, диагонали AD, шестиугольника $ABCDEF$ при повороте вокруг точки O по часовой стрелке на угол: 1) 60°; 2) 120°.

22.9. Диагонали квадрата $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 22.17). Укажите образы точек A, O и C, стороны AD, диагонали BD при повороте вокруг точки O по часовой стрелке на угол 90°.

22.10. Точка O — центр правильного n-угольника $A_1A_2...A_n$ (рис. 22.18). Докажите, что $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + ... + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$.

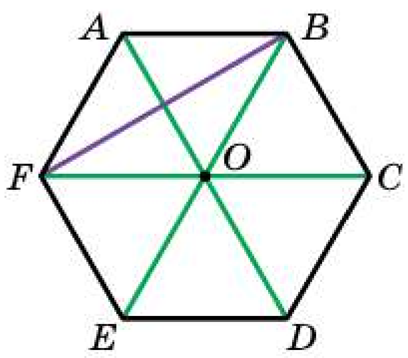


Рис. 22.16

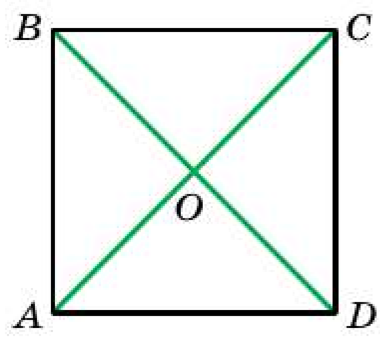


Рис. 22.17

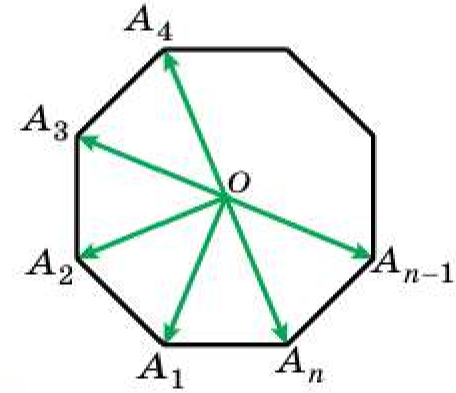


Рис. 22.18

22.11. Пусть вершина A равностороннего треугольника ABC является центром поворота на угол $120°$. Найдите отрезок BC_1, где точка C_1 — образ точки C при заданном повороте, если $AB = 1$ см.

22.12. Пусть вершина A квадрата $ABCD$ — центр поворота против часовой стрелки на угол $90°$. Найдите отрезок CC_1, где точка C_1 — образ точки C при заданном повороте, если $AB = 1$ см.

22.13. Точка M принадлежит углу ABC и не принадлежит его сторонам. Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник, вершиной прямого угла которого является точка M, а две другие вершины принадлежат сторонам BA и BC соответственно.

22.14. В данный квадрат впишите равносторонний треугольник так, чтобы одна из его вершин совпадала с вершиной квадрата, а две другие принадлежали сторонам квадрата.

22.15. Даны две окружности и точка M вне этих окружностей. Постройте прямоугольный равнобедренный треугольник с вершиной в точке M так, чтобы две другие его вершины лежали на данных окружностях.

22.16. На сторонах AB и AC треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты $ABNM$ и $ACQP$. Докажите, что $MC = BP$, $MC \perp BP$.

22.17. На сторонах BC и AC треугольника ABC во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники BCK и CAM. Найдите угол между прямыми BM и AK и докажите, что $BM = AK$.

22.18. На сторонах AB и AD квадрата $ABCD$ отметили точки K и M соответственно так, что $AK + AM = AB$. Найдите угол KOM, где точка O — центр квадрата.

22.19. На сторонах AB и AC равностороннего треугольника ABC отметили точки K и M соответственно так, что $AK + AM = AB$. Найдите угол KOM, где точка O — центр треугольника.

22.20. В равнобокой трапеции $ABCD$ на боковых сторонах AB и CD отметили точки K и M соответственно так, что $AK = CM$. Меньшее основание BC трапеции равно боковой стороне, а острый угол трапеции равен $60°$. Найдите угол KOM, где точка O — середина AD.

22.21. В ромбе $ABCD$ с тупым углом A, равным $120°$, на сторонах AB и AD отметили точки K и M соответственно так, что $BK = AM$. Найдите угол KCM.

22.22. Внутри квадрата $ABCD$ отметили точку K и на отрезке AK как на стороне построили квадрат $AKEM$, сторона KE которого пересекает сторону AD квадрата $ABCD$. Докажите, что $BK = DM$.

22.23. На прямой l отметили последовательно точки A, B и C, а на отрезках AB и AC в разных полуплоскостях относительно прямой l построили равносторонние треугольники ABD и ACN. Докажите, что середины K и L соответственно отрезков DC и BN и точка A являются вершинами равностороннего треугольника.

22.24. На прямой l отметили последовательно точки A, C, E. На отрезках AC и CE в одну полуплоскость относительно прямой l построили равносторонние треугольники ABC и CDE. Точки K и M — середины отрезков AD и BE соответственно. Докажите, что треугольник CKM равносторонний.

22.25. Даны выпуклый четырёхугольник $ABCD$ и точка O внутри него. Известно, что $\angle AOB = \angle COD = 90°$, $OA = OB$, $OC = OD$. Пусть точки K, L и M — середины отрезков AB, BC и CD соответственно. Докажите, что треугольник KLM равнобедренный и прямоугольный.

22.26. Постройте равносторонний треугольник так, чтобы его вершины принадлежали трём данным параллельным прямым.

22.27. Постройте квадрат так, чтобы три его вершины принадлежали трём данным параллельным прямым.

22.28. На стороне CD квадрата $ABCD$ отметили точку E. Биссектриса угла BAE пересекает сторону BC в точке F. Докажите, что $AE = BF + ED$.

22.29. В равностороннем треугольнике ABC выбрали точку P так, что $\angle APB = 150°$. Докажите, что существует прямоугольный треугольник, стороны которого равны отрезкам PA, PB и PC.

22.30. Внутри равностороннего треугольника ABC выбрали точку P такую, что $AP^2 + BP^2 = CP^2$. Докажите, что $\angle APB = 150°$.

22.31. В равностороннем треугольнике ABC выбрали точку M такую, что $\angle AMB = 120°$, $MA = 1$, $MB = 2$. Найдите отрезок MC.

22.32. Вне равностороннего треугольника ABC выбрали точку M так, что $\angle AMB = 120°$, $MA = 1$, $MB = 2$. Найдите отрезок MC.

22.33. Точка P расположена внутри квадрата $ABCD$, причём $AP : BP : CP = 1 : 2 : 3$. Найдите угол APB.

22.34. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $AB = AD$, $BC + DC = AC = 1$, $\angle BAD = 60°$. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$.

22.35. На сторонах AB и BC треугольника ABC во внешнюю сторону построили квадраты $ABDE$ и $CBLK$. Точки M_1 и M_2 — середины отрезков DL и AC соответственно. Докажите, что центры квадратов и точки M_1 и M_2 являются вершинами квадрата.

§ 23 Гомотетия. Подобие фигур

Рассмотрим фиксированную точку O и произвольную точку X. Построим такую точку X_1, что $\overrightarrow{OX_1} = 2\overrightarrow{OX}$ (рис. 23.1). Говорят, что точка X_1 является образом точки X при **гомотетии с центром** O **и коэффициентом** 2.

На рисунке 23.2 изображены точки O, X и X_1 такие, что $\overrightarrow{OX_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OX}$. Говорят, что точка X_1 — это образ точки X при гомотетии с центром O и коэффициентом $-\frac{1}{2}$.

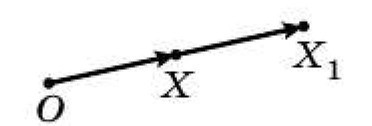


Рис. 23.1

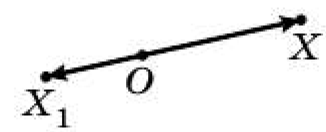


Рис. 23.2

Вообще, если точки O, X и X_1 таковы, что $\overrightarrow{OX_1} = k\overrightarrow{OX}$, где $k \neq 0$, то говорят, что точка X_1 — это образ точки X при **гомотетии с центром O и коэффициентом k**.

Точку O называют **центром гомотетии**, число k — **коэффициентом гомотетии**, $k \neq 0$.

Рассмотрим фигуру F и точку O. Каждой точке X фигуры F поставим в соответствие точку X_1, являющуюся образом точки X при гомотетии с центром O и коэффициентом k (если точка O принадлежит фигуре F, то ей сопоставляется она сама). В результате такого преобразования фигуры F получим фигуру F_1 (рис. 23.3). Такое преобразование называют **гомотетией** фигуры F **с центром O и коэффициентом k** и обозначают так: H_O^k. Пишут: $H_O^k(F) = F_1$. Также говорят, что фигура F_1 **гомотетична** фигуре F с центром O и коэффициентом k.

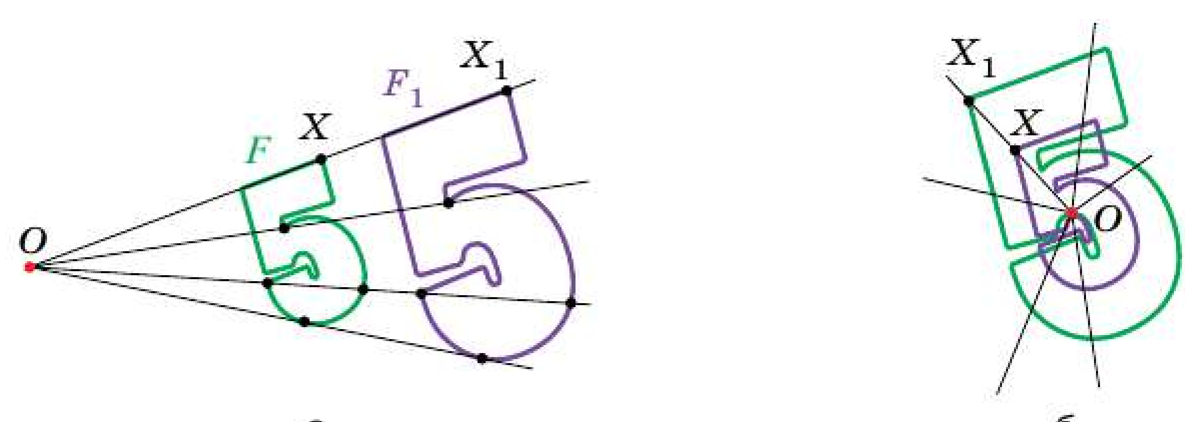


Рис. 23.3

Например, на рисунке 23.4 треугольник $A_1B_1C_1$ гомотетичен треугольнику ABC с центром O и коэффициентом, равным -3. Пишут: $H_O^{-3}(\triangle ABC) = \triangle A_1B_1C_1$.

Также можно сказать, что треугольник ABC гомотетичен треугольнику $A_1B_1C_1$ с тем же центром, а коэффициентом гомотетии, равным $-\frac{1}{3}$. Пишут: $H_O^{-\frac{1}{3}}(\triangle A_1B_1C_1) = \triangle ABC$.

Очевидно, что гомотетии H_O^k и $H_O^{\frac{1}{k}}$ являются взаимно обратными преобразованиями.

Отметим, что при $k = -1$ гомотетия с центром O является центральной симметрией с центром O (рис. 23.5). Если $k = 1$, то гомотетия является тождественным преобразованием.

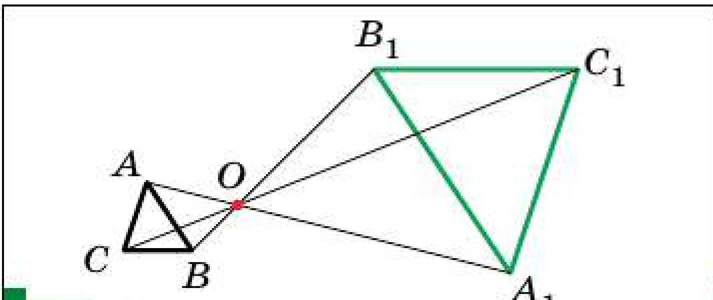


Рис. 23.4

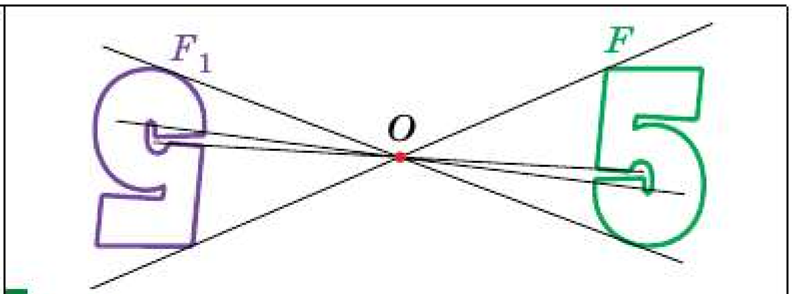


Рис. 23.5

Очевидно, что при $k \neq 1$ и $k \neq -1$ гомотетия не является движением.

Теорема 23.1

При гомотетии фигуры F с коэффициентом k все расстояния между её точками изменяются в $|k|$ раз, т. е. если A и B — произвольные точки фигуры F, а A_1 и B_1 — их соответствующие образы при гомотетии с коэффициентом k, то $A_1B_1 = |k|AB$.

Доказательство

Пусть точка O — центр гомотетии.

Тогда $\overrightarrow{OA_1} = k\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB_1} = k\overrightarrow{OB}$.

Имеем: $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OA_1} = k\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OA} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = k\overrightarrow{AB}$, т. е. $A_1B_1 = |k|AB$. ■

Следствие

Если треугольник $A_1B_1C_1$ гомотетичен треугольнику ABC с коэффициентом гомотетии k, то $\triangle A_1B_1C_1 \overset{k}{\sim} \triangle ABC$.

Для доказательства этой теоремы достаточно воспользоваться теоремой 23.1 и третьим признаком подобия треугольников.

Гомотетия обладает целым рядом других свойств.

Теорема 23.2

При гомотетии фигуры F образами любых её трёх точек, лежащих на одной прямой, являются три точки, лежащие на одной прямой, а образами трёх точек, не лежащих на одной прямой, являются три точки, не лежащие на одной прямой.

Воспользовавшись теоремой 23.1 и идеей доказательства теоремы 19.1, докажите эту теорему самостоятельно.

Следствие

При гомотетии отрезка, луча, прямой образами являются соответственно отрезок, луч, прямая. При гомотетии угла образом является угол, равный данному. При гомотетии треугольника образом является треугольник, подобный данному.

Докажите это следствие самостоятельно.

Перечисленные свойства гомотетии указывают на то, что это преобразование может изменить размеры фигуры, но не меняет её форму, т. е. при гомотетии образ и прообраз являются подобными фигурами.

Заметим, что в курсе геометрии 8 класса, говоря о подобии фигур, мы давали определение только подобных треугольников. Определим понятие подобия для произвольных фигур.

На рисунке 23.6 фигура F_1 гомотетична фигуре F, а фигура F_2 симметрична фигуре F_1 относительно прямой l.

Фигура F_2 получена из фигуры F в результате композиции двух преобразований: гомотетии и осевой симметрии.

Поскольку $F_1 = F_2$, то у фигур F и F_2 одинаковые формы, но разные размеры, т. е. они подобны. Говорят, что фигура F_2 получена из фигуры F в результате **преобразования подобия** фигуры F.

На рисунке 23.7 фигура F_1 гомотетична фигуре F, а фигура F_2 — образ фигуры F_1 при некотором движении. Здесь также можно утверждать, что фигуры F и F_2 подобны.

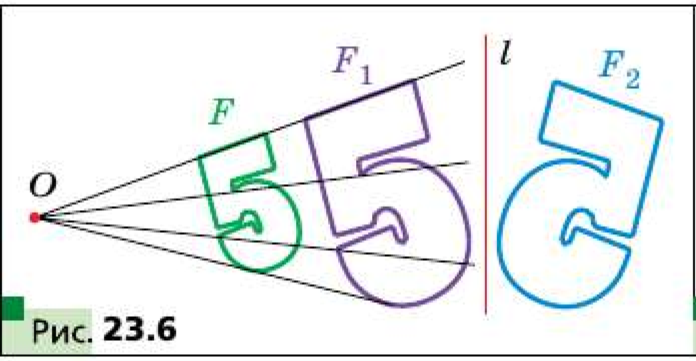


Рис. 23.6

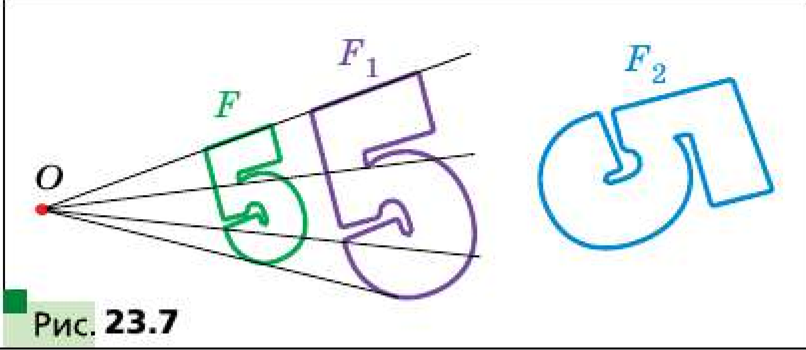


Рис. 23.7

Из сказанного следует, что целесообразно принять следующее определение.

Определение

Две фигуры называют подобными, если одну из них можно получить из другой в результате композиции двух преобразований: гомотетии и движения.

Это определение иллюстрирует схема, изображённая на рисунке 23.8.

$\boxed{\text{Подобие}} = \boxed{\text{Гомотетия}} + \boxed{\text{Движение}}$

Рис. **23.8**

Запись $F \backsim F_1$ означает, что фигуры F и F_1 подобны. Также говорят, что фигура F_1 — образ фигуры F при **преобразовании подобия**.

Из приведённого определения следует, что *при преобразовании подобия фигуры F расстояния между её точками изменяются в одно и то же число раз*.

Так как тождественное преобразование является движением, то из схемы, изображённой на рисунке 23.8, следует, что гомотетия — частный случай преобразования подобия.

Пусть A и B — произвольные точки фигуры F, а точки A_1 и B_1 — их образы при преобразовании подобия. Точки A_1 и B_1 принадлежат фигуре F_1, которая подобна фигуре F. Число $k = \frac{A_1B_1}{AB}$ называют **коэффициентом подобия**. Говорят, что фигура F_1 подобна фигуре F с коэффициентом подобия k, а фигура F подобна фигуре F_1 с коэффициентом подобия $\frac{1}{k}$.

Заметим, что преобразование подобия с коэффициентом $k = 1$ является движением. Отсюда следует, что движение — частный случай преобразования подобия.

С преобразованием подобия мы часто встречаемся в повседневной жизни. Например, в результате изменения масштаба карты получается карта, подобная данной (рис. 23.9). Фотография — это преобразование негатива в подобное изображение на фотобумаге. Перенося в свою тетрадь рисунок, сделанный учителем на доске, вы также выполняете преобразование подобия.

Рис. 23.9

Теорема 23.3

Отношение площадей подобных многоугольников равно квадрату коэффициента подобия.

Наметим схему доказательства. Вначале докажем эту теорему для треугольников.

Пусть треугольник $A_1B_1C_1$ — образ треугольника ABC при преобразовании подобия с коэффициентом k (рис. 23.10). Сторона A_1C_1 — образ стороны AC. Тогда $A_1C_1 = k \cdot AC$. Проведём высоты BD и B_1D_1. Ясно, что высота B_1D_1 — это образ высоты BD (это получаем из следствия из теоремы 23.2). Отсюда $B_1D_1 = k \cdot BD$. Имеем:

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}A_1C_1 \cdot B_1D_1}{\frac{1}{2}AC \cdot BD} = \frac{kAC \cdot kBD}{AC \cdot BD} = k^2.$$

Если данные многоугольники выпуклые, то разобьём их на треугольники. Для этого выберем в многоугольниках вершины M и M_1 — соответственные точки при преобразовании подобия. В каждом из многоугольников проведём все диагонали, выходящие из вершин M и M_1 (рис. 23.11). Далее примените доказанный факт для образовавшихся пар подобных треугольников.

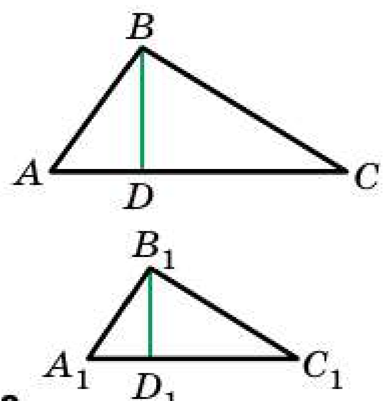


Рис. 23.10

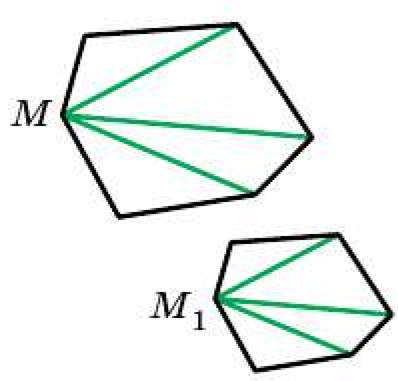


Рис. 23.11

Утверждение теоремы остаётся справедливым и для невыпуклых многоугольников. Здесь следует воспользоваться таким фактом: каждый многоугольник можно разбить на треугольники. ■

Задача 1. Докажите, что образом прямой l при гомотетии с центром O, не принадлежащим прямой l, является прямая, параллельная данной.

Решение. Из свойств гомотетии следует, что образом прямой l будет прямая. Для построения прямой достаточно знать две любые её точки. Выберем на прямой l произвольные точки A и B (рис. 23.12). Пусть точки A_1 и B_1 — их образы при гомотетии с центром O и коэффициентом k (рисунок 23.12 соответствует случаю, когда $k > 1$). Тогда прямая A_1B_1 — образ прямой AB.

При доказательстве теоремы 23.1 мы показали, что $\overrightarrow{A_1B_1} = k\overrightarrow{AB}$. Следовательно, $AB \parallel A_1B_1$. ■

Задача 2. В остроугольный треугольник ABC впишите квадрат так, чтобы две его вершины лежали соответственно на сторонах AB и BC, а две другие — на стороне AC.

Решение. Из произвольной точки M стороны AB опустим перпендикуляр MQ на сторону AC (рис. 23.13). Построим квадрат $MQPN$ так, чтобы точка P лежала на луче QC. Пусть луч AN пересекает сторону BC в точке N_1.

Рассмотрим гомотетию с центром A и коэффициентом $k = \dfrac{AN_1}{AN}$. Тогда точка N_1 — образ точки N при этой гомотетии. Образом отрезка MN является отрезок M_1N_1, где точка M_1 принадлежит лучу AB, причём $M_1N_1 \parallel MN$. Аналогично отрезок N_1P_1 такой, что точка P_1 принадлежит лучу AC и $N_1P_1 \parallel NP$, является образом отрезка NP. Следовательно, отрезки M_1N_1 и N_1P_1 — соседние стороны искомого квадрата. Для завершения построения осталось опустить перпендикуляр M_1Q_1 на сторону AC. ■

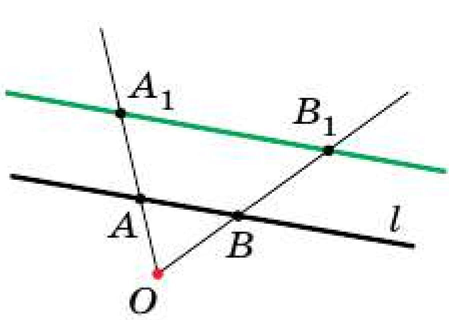


Рис. **23.12**

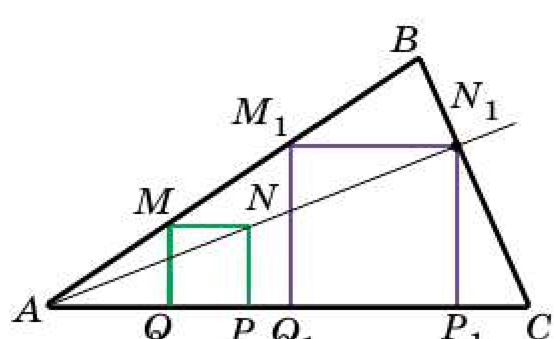


Рис. **23.13**

Задача 3. Отрезок CD — высота прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$). Найдите радиус r вписанной окружности треугольника ABC, если радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, соответственно равны r_1 и r_2.

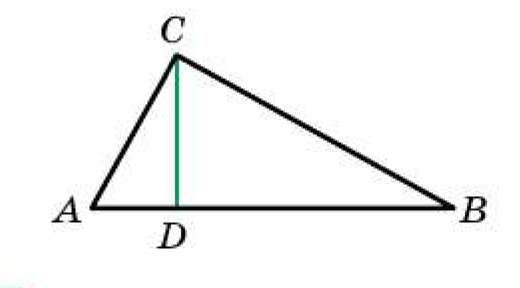


Рис. **23.14**

Решение. Так как угол A — общий для прямоугольных треугольников ACD и ABC, то эти треугольники подобны (рис. 23.14). Пусть коэффициент подобия равен k_1. Очевидно, что $k_1 = \frac{r_1}{r}$. Аналогично $\triangle BCD \sim \triangle ABC$ с коэффициентом подобия $k_2 = \frac{r_2}{r}$.

Обозначим площади треугольников ACD, BCD и ABC соответственно S_1, S_2 и S. Имеем:

$$\frac{S_1}{S} = k_1^2 = \frac{r_1^2}{r^2}; \quad \frac{S_2}{S} = k_2^2 = \frac{r_2^2}{r^2}.$$

Отсюда $\frac{r_1^2 + r_2^2}{r^2} = \frac{S_1 + S_2}{S} = 1$.

Получаем, что $r^2 = r_1^2 + r_2^2$, т. е. $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$. ■

Задача 4. Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC. Докажите, что радиус описанной окружности треугольника ABC в два раза больше радиуса описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$.

Решение. Пусть прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекают описанную окружность треугольника ABC соответственно в точках M, N и P (рис. 23.15). Обозначим буквой H ортоцентр треугольника ABC. Из ключевой задачи 20.30 следует, что $HA_1 = A_1M$, $HB_1 = B_1N$, $HC_1 = C_1P$.

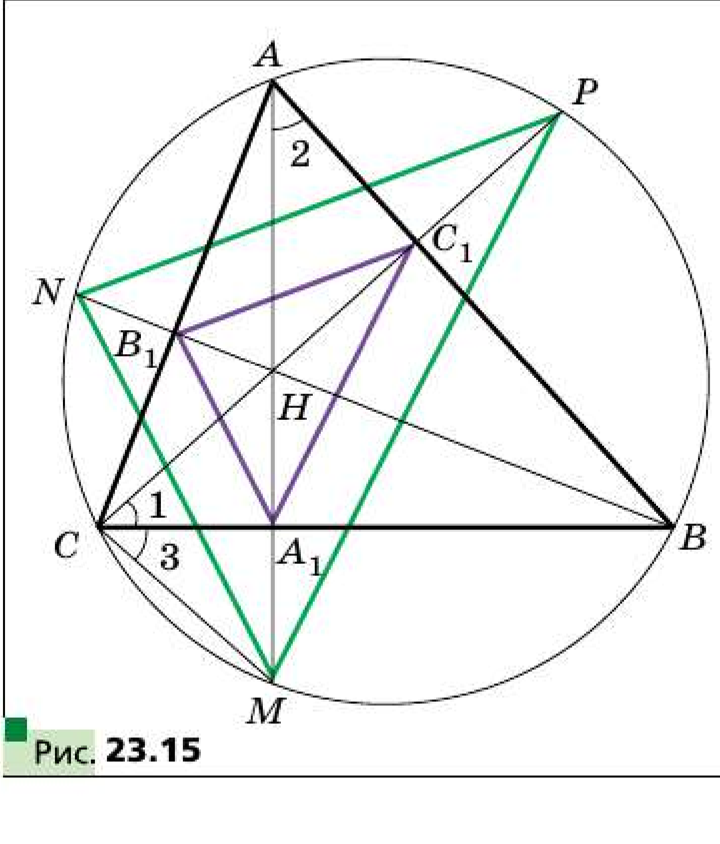


Рис. **23.15**

Теперь ясно, что треугольник MNP гомотетичен треугольнику $A_1B_1C_1$ с центром H и коэффициентом 2. Тогда радиус описанной окружности треугольника MNP в два раза больше радиуса описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$. Осталось заметить, что треугольники MNP и ABC вписаны в одну окружность. ■

1. В каком случае говорят, что точка X_1 является образом точки X при гомотетии с центром O и коэффициентом k?
2. Опишите преобразование фигуры F, которое называют гомотетией с центром O и коэффициентом k.
3. Как изменяется расстояние между точками при гомотетии с коэффициентом k?
4. Сформулируйте свойства гомотетии.
5. Какие фигуры называют подобными?
6. Чему равно отношение площадей подобных многоугольников?

Практические задания

23.1. Постройте образ отрезка AB (рис. 23.16) при гомотетии с центром O и коэффициентом: 1) $k = 2$; 2) $k = -\frac{1}{2}$.

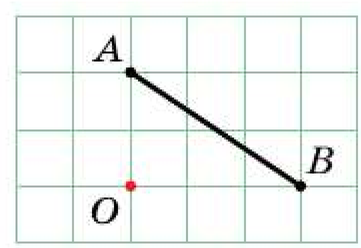


Рис. 23.16

23.2. Начертите отрезок AB. Постройте образ этого отрезка при гомотетии с коэффициентом k и центром:

1) в точке A, $k = 3$;
2) в точке B, $k = -2$;
3) в середине отрезка AB, $k = 2$.

23.3. Начертите окружность, радиус которой равен 2 см, и отметьте на ней точку A. Постройте образ этой окружности при гомотетии с коэффициентом k и центром:

1) в центре окружности, $k = -\frac{1}{2}$, $k = 2$;
2) в точке A, $k = 2$, $k = -\frac{1}{2}$.

23.4. Начертите треугольник ABC. Постройте образ этого треугольника при гомотетии с коэффициентом k и центром:

1) в точке B, $k = 3$;
2) в точке C, $k = -\frac{1}{2}$;
3) в точке A, $k = \frac{1}{2}$;
4) в середине стороны AB, $k = \frac{1}{2}$;
5) в середине стороны AC, $k = -\frac{1}{3}$.

23.5. Начертите треугольник ABC. Найдите точку пересечения его медиан. Постройте образ этого треугольника при гомотетии с центром в точке пересечения его медиан и коэффициентом: 1) $k = 2$; 2) $k = \frac{1}{2}$; 3) $k = -\frac{1}{2}$.

23.6. Начертите параллелограмм $ABCD$. Точку пересечения его диагоналей обозначьте O. Постройте образ этого параллелограмма при гомотетии с центром O и коэффициентом: 1) $k = 2$; 2) $k = -\frac{1}{2}$.

23.7. Начертите квадрат $ABCD$. Постройте образ этого квадрата при гомотетии с коэффициентом k и центром:

1) в точке A, $k = \frac{1}{3}$;
2) в точке B, $k = -2$;
3) в точке C, $k = 2$.

23.8. Ориентируясь по клеточкам, начертите пятиугольник $ABCDE$ (рис. 23.17). Постройте пятиугольник $A_1B_1C_1D_1E_1$, подобный данному с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$.

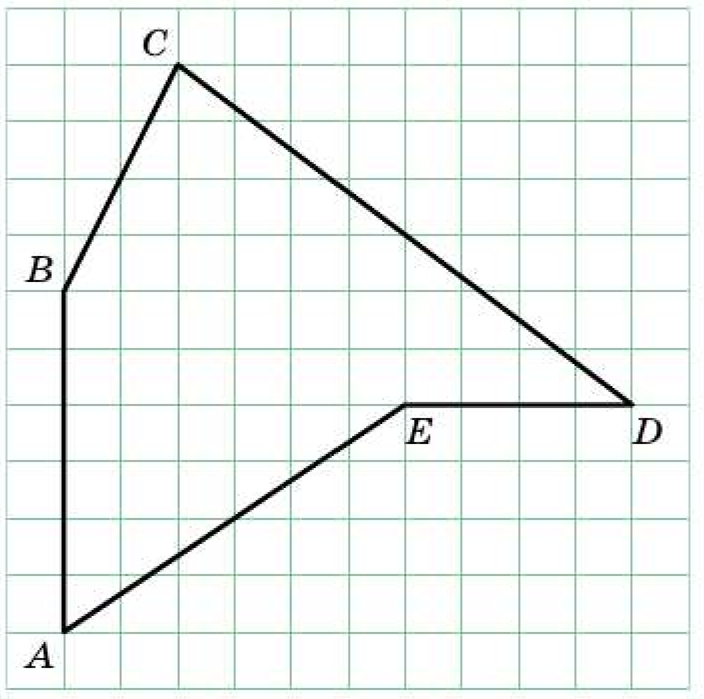


Рис. 23.17

23.9. На рисунке 23.18 точка A_1 — образ точки A при гомотетии с центром O. Постройте образ точки B при этой гомотетии.

Рис. 23.18

23.10. На рисунке 23.19 точка A_1 — образ точки A при гомотетии с коэффициентом: 1) $k = 3$; 2) $k = -2$. Постройте центр гомотетии.

Рис. 23.19

23.11. На рисунке 23.20 изображены прямоугольник $ABCD$ и точки A_1 и D_1, являющиеся образами соответственно точек A и D при преобразовании подобия. Постройте образ прямоугольника $ABCD$ при этом преобразовании. Сколько решений имеет задача?

23.12. На рисунке 23.21 изображены прямоугольник $ABCD$ и точки A_1 и C_1, являющиеся образами соответственно точек A и C при преобразовании подобия. Постройте образ прямоугольника $ABCD$ при этом преобразовании. Сколько решений имеет задача?

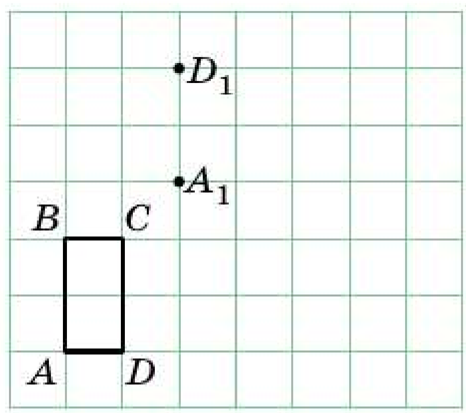


Рис. **23.20**

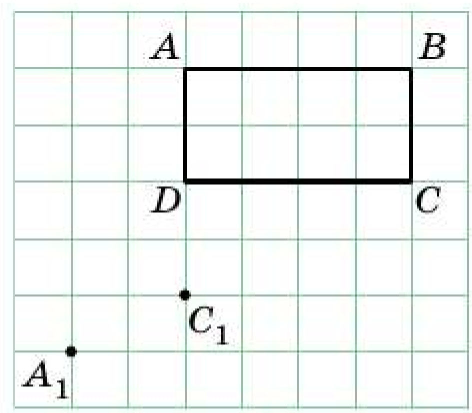


Рис. **23.21**

23.13. Постройте образ треугольника ABC при преобразовании подобия, которое является композицией двух преобразований: гомотетии с центром O и коэффициентом $k = 2$ и осевой симметрии относительно прямой l (рис. 23.22). Укажите коэффициент подобия.

23.14. Начертите окружность, радиус которой равен 2 см. Отметьте точку O на расстоянии 4 см от её центра. Постройте образ этой окружности при преобразовании подобия, которое является композицией двух преобразований: гомотетии с центром O и коэффициентом $k = \frac{1}{2}$ и поворота с центром O по часовой стрелке на угол 45°. Укажите коэффициент подобия.

23.15. На рисунке 23.23 изображены две параллельные прямые a и b. Постройте центр гомотетии, при которой прямая b является обра-

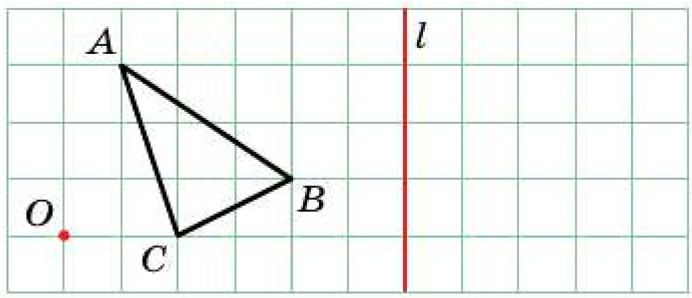


Рис. **23.22**

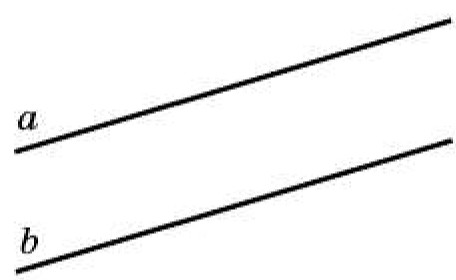


Рис. **23.23**

зом прямой a с коэффициентом: 1) $k = 2$; 2) $k = \frac{1}{2}$; 3) $k = -\frac{1}{2}$. Сколько решений имеет задача?

23.16. Начертите трапецию $ABCD$, основание BC которой в два раза меньше основания AD. Постройте центр гомотетии, при которой отрезок AD является образом отрезка BC с коэффициентом: 1) $k = 2$; 2) $k = -2$.

Упражнения

23.17. В параллелограмме $ABCD$ точка D_1 — середина стороны AD. При гомотетии с центром A точка D_1 является образом точки D. Найдите коэффициент гомотетии. Укажите, какие точки являются образами точек B и C при этой гомотетии.

23.18. Какие из фигур, изображённых на рисунке 23.24, совпадают со своими образами при гомотетии с центром O и коэффициентом $k > 0$ и $k \neq 1$?

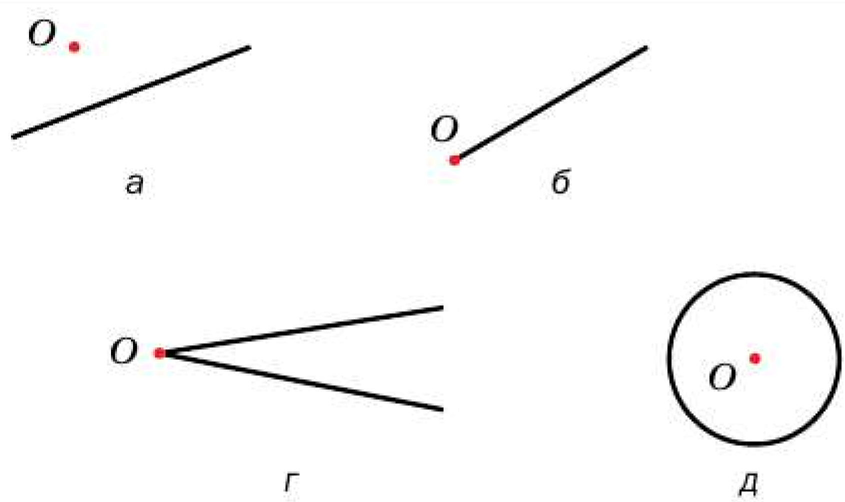


Рис. 23.24

23.19. Какие из фигур, изображённых на рисунке 23.25, совпадают со своими образами при гомотетии с центром O и коэффициентом $k < 0$?

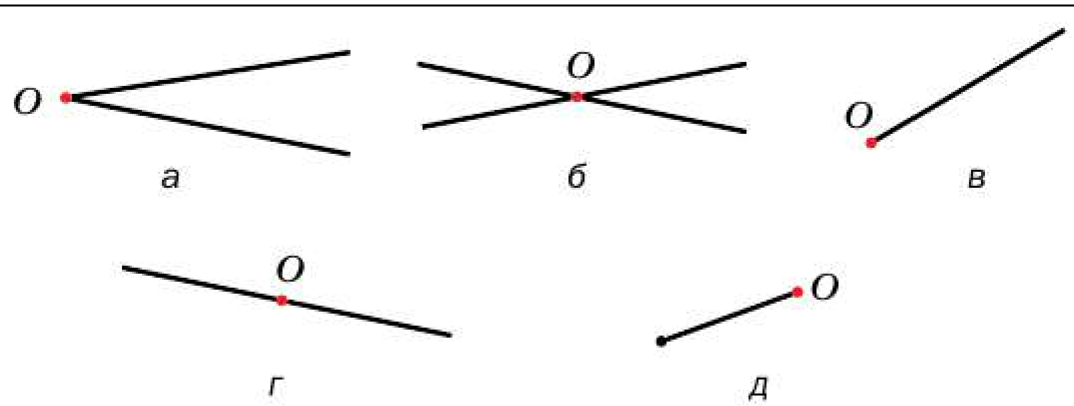


Рис. 23.25

23.20. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M (рис. 23.26). Найдите коэффициент гомотетии с центром: 1) в точке B, при которой точка B_1 является образом точки M; 2) в точке M, при которой точка A_1 является образом точки A; 3) в точке C, при которой точка M является образом точки C_1.

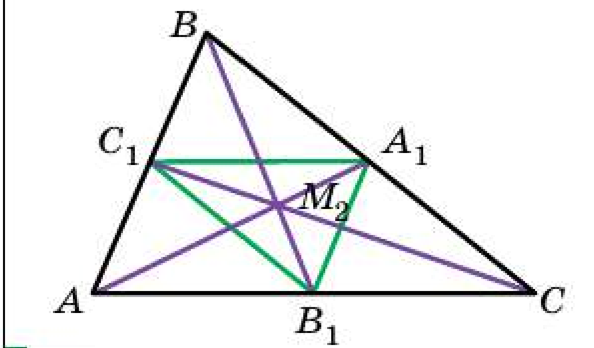


Рис. **23.26**

23.21. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M (рис. 23.26). Укажите коэффициент и центр гомотетии, при которой треугольник $A_1B_1C_1$ является образом треугольника ABC.

23.22. В треугольнике ABC медианы AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке M. Точки K, F и N — середины отрезков AM, BM и CM соответственно. Укажите коэффициент и центр гомотетии, при которой треугольник ABC является образом треугольника KFN.

23.23. Найдите образы точек $A\ (-2;\ 1)$, $B\ (3;\ 0)$, $D\ (0;\ -6)$ при гомотетии с центром $O\ (0;\ 0)$ и коэффициентом: 1) $k = 2$; 2) $k = 3$; 3) $k = -\frac{1}{2}$; 4) $k = -\frac{1}{3}$.

23.24. Точка $A_1\ (-1;\ 2)$ — образ точки $A\ (-3;\ 6)$ при гомотетии с центром в начале координат. Найдите коэффициент гомотетии.

23.25. Площади двух подобных треугольников равны 28 см^2 и 63 см^2. Одна из сторон первого треугольника равна 8 см. Найдите сторону другого треугольника, соответствующую данной стороне первого.

23.26. Соответствующие стороны двух подобных треугольников равны 30 см и 24 см. Площадь треугольника со стороной 30 см равна 45 см^2. Найдите площадь другого треугольника.

23.27. Площадь треугольника равна S. Чему равна площадь треугольника, который отсекает от данного его средняя линия?

23.28. Площадь треугольника равна S. Найдите площадь треугольника, вершины которого — середины средних линий данного треугольника.

23.29. Отрезок MN — средняя линия треугольника ABC (рис. 23.27). Укажите коэффициент и центр гомотетии, при которой: 1) отрезок AC является образом отрезка MN; 2) отрезок MN является образом отрезка AC.

23.30. Параллельные прямые пересекают стороны угла A в точках M, N, P и Q (рис. 23.28). Известно, что $AM : MP = 3 : 1$. Укажите ко-

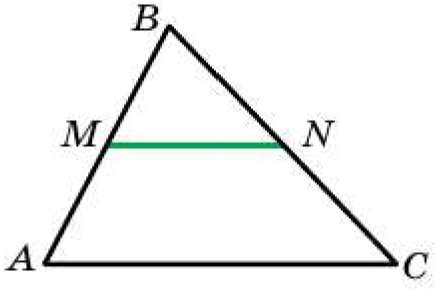


Рис. **23.27**

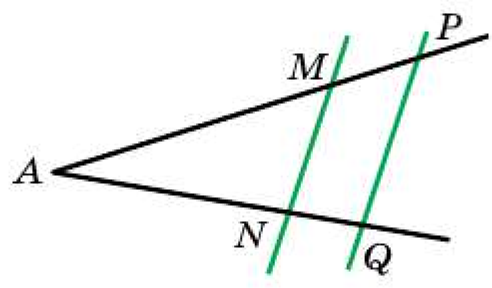


Рис. **23.28**

эффициент и центр гомотетии, при которой: 1) отрезок PQ является образом отрезка MN; 2) отрезок MN является образом отрезка PQ.

23.31. Параллельные отрезки BC и AD таковы, что $AD = 3BC$. Сколько существует точек, являющихся центрами гомотетии, при которой образом отрезка BC является отрезок AD? Для каждой такой точки определите коэффициент гомотетии.

23.32. Окружности с центрами O_1 и O_2 соответственно с радиусами R и r касаются внешним образом в точке O (рис. 23.29). Докажите, что окружность с центром O_1 является образом окружности с центром O_2 при гомотетии с центром O и коэффициентом $-\frac{R}{r}$.

23.33. Окружности с центрами O_1 и O_2 соответственно с радиусами R и r касаются внутренним образом в точке O (рис. 23.30). Докажите, что окружность с центром O_1 является образом окружности с центром O_2 при гомотетии с центром O и коэффициентом $\frac{R}{r}$.

23.34. Окружность с центром O касается прямой a. Докажите, что образ этой окружности при гомотетии с центром A, где A — произвольная точка прямой a (рис. 23.31), касается этой прямой.

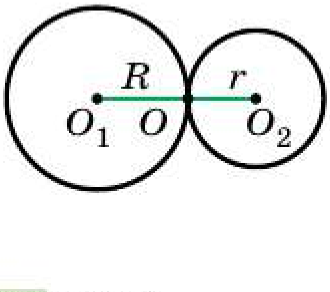


Рис. **23.29**

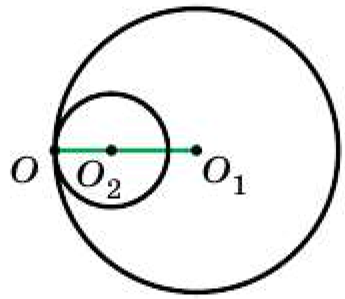


Рис. **23.30**

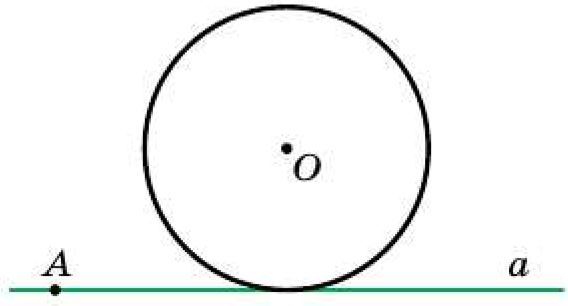


Рис. **23.31**

23.35. Две окружности касаются в точке K. Прямая, проходящая через точку K, пересекает эти окружности в точках A и B. Докажите, что касательные к окружностям, проведённые через точки A и B, параллельны.

23.36. Точка $A\ (2; -3)$ — образ точки $B\ (8; 6)$ при гомотетии с центром $M\ (4; 0)$. Найдите коэффициент гомотетии.

23.37. Точка $A\ (-7; 10)$ — образ точки $B\ (-1; -2)$ при гомотетии с коэффициентом -2. Найдите центр гомотетии.

23.38. Точка $A_1\ (x; 4)$ — образ точки $A\ (-6; y)$ при гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом: 1) $k = \frac{1}{2}$; 2) $k = -2$. Найдите x и y.

23.39. Точка $A_1\ (4; y)$ — образ точки $A\ (x; -4)$ при гомотетии с центром $B\ (1; -1)$ и коэффициентом $k = -3$. Найдите x и y.

23.40. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает его сторону AB в точке M, а сторону BC — в точке K. Найдите площадь треугольника ABC, если $BM = 4$ см, $AC = 8$ см, $AM = MK$, а площадь треугольника MBK равна 5 см^2.

23.41. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E. Найдите площадь трапеции, если $BC : AD = 3 : 5$, а площадь треугольника AED равна 175 см^2.

23.42. Отрезки BM и CK — высоты остроугольного треугольника ABC, $\angle A = 45°$. Найдите отношение площадей треугольников AMK и ABC.

23.43. Найдите образ прямой $y = 2x + 1$ при гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом: 1) $k = 2$; 2) $k = -\frac{1}{2}$.

23.44. Найдите образ окружности $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 4$ при гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом: 1) $k = \frac{1}{2}$; 2) $k = -2$.

23.45. Диагонали трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) пересекаются в точке O. Докажите, что описанные окружности треугольников AOD и BOC касаются.

23.46. Докажите, что если неравные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ таковы, что $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$, $CA \parallel C_1A_1$, то существуют такие точка O и число $k \neq 0$, $|k| \neq 1$, что $H_O^k(\triangle ABC) = \triangle A_1B_1C_1$.

23.47. Две окружности касаются внутренним образом. Через точку касания проведены две прямые, пересекающие окружности в точках A_1, A_2, B_1, B_2 (рис. 23.32). Докажите, что $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

23.48. Две окружности касаются внешним образом. Через точку касания проведены две прямые, пересекающие окружности в точках A_1, A_2, B_1, B_2 (рис. 23.33). Докажите, что $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

23.49. Точка A принадлежит окружности (рис. 23.34). Найдите геометрическое место точек, являющихся серединами хорд данной окружности, одним из концов которых является точка A.

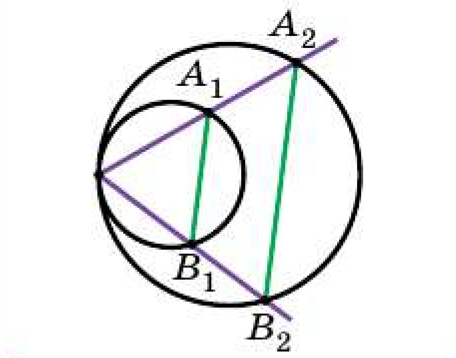


Рис. **23.32**

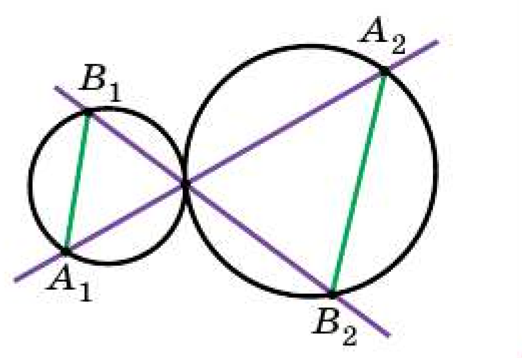


Рис. **23.33**

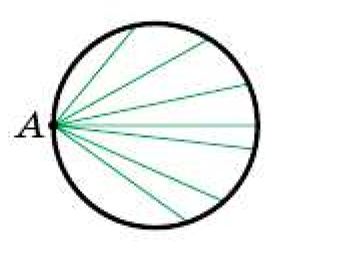


Рис. **23.34**

23.50. Две окружности касаются внутренним образом, причём меньшая окружность проходит через центр большей. Докажите, что любую хорду большей окружности, проходящую через точку касания, меньшая окружность делит пополам.

23.51. Даны треугольник ABC и произвольная точка M. Докажите, что точки, симметричные точке M относительно середин сторон треугольника ABC, являются вершинами треугольника, равного данному.

23.52. На продолжениях медиан AK, BL и CM треугольника ABC выбраны точки P, Q, R такие, что $KP = \frac{1}{2}AK$, $LQ = \frac{1}{2}BL$, $MR = \frac{1}{2}CM$. Найдите S_{PQR}, если $S_{ABC} = 1$.

23.53. Докажите, что точки, симметричные произвольной точке относительно середин сторон квадрата, являются вершинами некоторого квадрата.

23.54. Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ отметили точку P. Пусть точки M_1, M_2, M_3, M_4 — точки пересечения медиан треугольников APB, BPC, CPD и DPA соответственно. Докажите, что четырёхугольник $M_1M_2M_3M_4$ — параллелограмм.

23.55. Две окружности касаются внутренним образом в точке O. В произвольной точке M внутренней окружности проведена к ней касательная, пересекающая вторую окружность в точках A и B. Докажите, что $\angle AOM = \angle MOB$.

23.56. Постройте треугольник по двум его углам и радиусу описанной окружности.

23.57. Постройте треугольник по двум его углам и радиусу вписанной окружности.

23.58. Постройте треугольник по периметру и двум углам.

23.59. Впишите в данный остроугольный треугольник ABC прямоугольник, стороны которого относятся как $2 : 1$, так, чтобы две вершины большей стороны прямоугольника лежали на стороне AC треугольника, а две другие вершины — на сторонах AB и BC.

23.60. Впишите в данный треугольник другой треугольник, стороны которого были бы параллельны трём данным прямым.

23.61. Точку, находящуюся внутри выпуклого четырёхугольника с площадью S, соединили с его вершинами. Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого являются точками пересечения медиан четырёх образовавшихся треугольников.

23.62. Отрезок AB — хорда данной окружности, точка C — произвольная точка этой окружности. Найдите геометрическое место точек, являющихся точками пересечения медиан треугольников ABC.

23.63. Даны две точки A и B и прямая l. Найдите геометрическое место точек, являющихся точками пересечения медиан треугольников ABC, где C — произвольная точка прямой l.

23.64. Точка M принадлежит углу ABC, но не принадлежит его сторонам. Постройте окружность, которая касается сторон угла и проходит через точку M.

23.65. Внутри угла AOB дана точка M. Найдите на луче OA точку, одинаково удалённую от точки M и луча OB.

23.66. На стороне AC остроугольного треугольника ABC отметили точку M. Пусть перпендикуляры, опущенные из середин отрезков AM и MC соответственно на стороны BC и AB, пересекаются в точке O. При каком положении точки M на стороне AC длина отрезка MO будет наименьшей?

23.67. На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC отметили соответственно точки K и L так, что $KL \parallel BC$. Прямые, проведённые через точки K и L перпендикулярно сторонам AB и AC соответственно, пересекаются в точке M. Докажите, что прямая AM содержит центр описанной окружности треугольника ABC.

23.68. Точка M лежит внутри окружности. Проведите через точку M хорду AB так, чтобы $AM : MB = 2 : 1$.

23.69. На катетах AC и CB и гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отметили соответственно точки M, N и K так, что $MN \parallel AB$ и треугольник MNK равносторонний. Потом весь рисунок стёрли, оставив только точки A, K и B. Как по этим точкам восстановить треугольник ABC?

23.70. Биссектрисы углов A, B и C треугольника ABC пересекают описанную окружность этого треугольника в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Вписанная окружность касается сторон AB, BC и CA соответственно в точках C_2, A_2 и B_2. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в одной точке.

23.71. Биссектрисы углов A, B и C треугольника ABC пересекают описанную окружность этого треугольника в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Касательные к окружности в точках A_1, B_1 и C_1 пересекаются в точках A_2, B_2 и C_2 (рис. 23.35). Докажите, что прямые AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке.

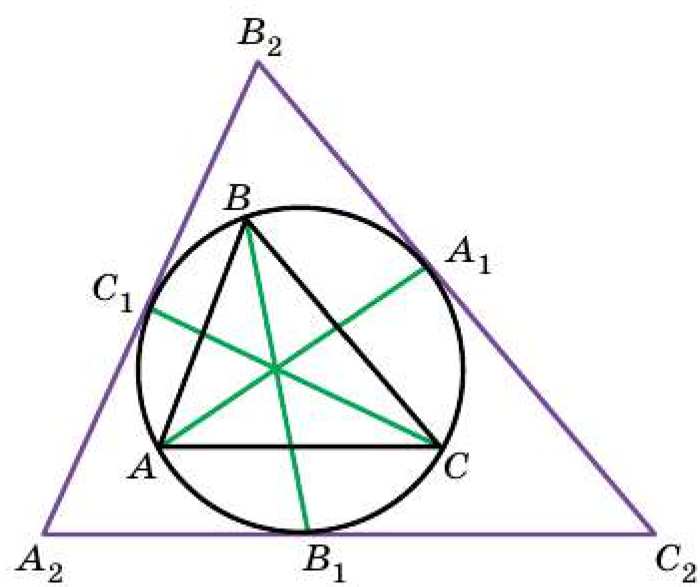


Рис. **23.35**

23.72. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB, BC и CA в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Прямые, содержащие высоты треугольника $A_1B_1C_1$, проведённые к сторонам A_1B_1, B_1C_1 и C_1A_1, пересекают данную окружность в точках C_2, A_2 и B_2 соответственно. Докажите, что прямые AA_2, BB_2 и CC_2 пересекаются в одной точке.

23.73. Рассмотрим множество равнобедренных треугольников с равными радиусами вписанных окружностей, основания которых лежат на данной прямой, а одна из вершин — в данной точке A этой прямой. Докажите, что все прямые, содержащие боковые стороны этих треугольников, которые не проходят через вершину A, касаются одной и той же окружности.

Инверсия

Как правило, мы рассматривали такие преобразования фигур, которые сохраняли прямолинейность, т. е. имели свойства, о которых говорилось в теоремах 19.1 и 23.2.

В этом рассказе мы рассмотрим преобразование фигур, которое называют инверсией (от латинского «inversio» — переворачивание, обращение). Это преобразование не сохраняет прямолинейность.

Пусть дана окружность радиуса R с центром O. Рассмотрим фигуру F, которой является вся плоскость за исключением точки O. Каждой точке X фигуры F поставим в соответствие такую точку X_1 луча OX, что

$$OX_1 \cdot OX = R^2 \text{ (рис. 23.36).}$$

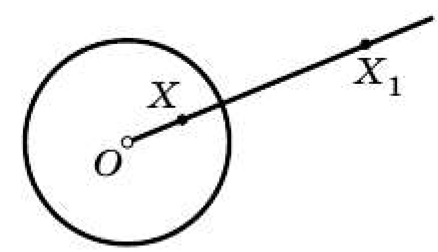


Рис. 23.36

Такое преобразование фигуры F называют **инверсией относительно окружности** с центром O. Точку O называют **центром инверсии** (это единственная точка, в которой преобразование «инверсия» не определено). Данную окружность называют **окружностью инверсии**, число R — **радиусом инверсии**.

Инверсию с центром O радиуса R обозначают так: I_O^R.

Непосредственно из определения следуют следующие три свойства инверсии.

Свойство 1

Образами точек, которые лежат внутри окружности инверсии (не включая центр окружности), являются точки, лежащие вне окружности, и наоборот.

Свойство 2

Если X — произвольная точка окружности инверсии, то $I_O^R(X) = X$, т. е. все точки окружности инверсии являются неподвижными точками этого преобразования.

Эти два свойства позволяют рассматривать инверсию как преобразование, которое как бы «выворачивает» круг «наружу» и наоборот.

Причём если точку X выбирать всё ближе и ближе к центру инверсии, то её образ будет располагаться все дальше и дальше от центра инверсии (рис. 23.37).

Рис. 23.37

Свойство 3

Инверсия является обратимым преобразованием. Преобразованием, обратным инверсии I_O^R, является сама эта инверсия I_O^R.

Инверсию также называют **симметрией относительно окружности**. Это связано с тем, что приведённые свойства 1—3 похожи на свойства осевой симметрии.

Рассмотрим ещё несколько свойств инверсии.

Свойство 4

Образом прямой, проходящей через центр инверсии, является сама эта прямая[1].

Свойство 5

Образом прямой, не проходящей через центр инверсии, является окружность, проходящая через центр инверсии[2].

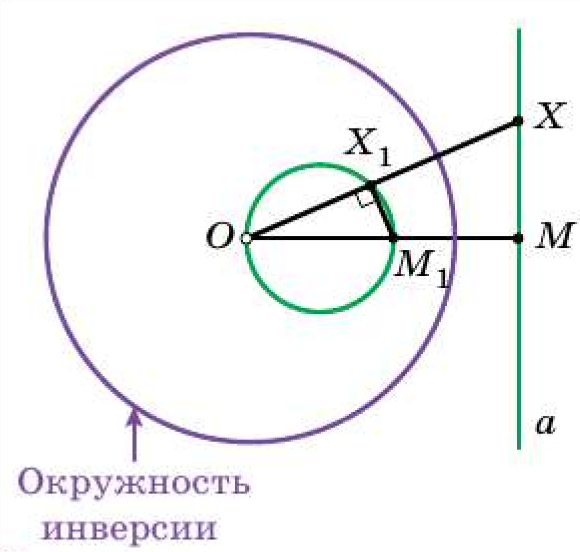


Рис. 23.38

Доказательство

Пусть прямая a не проходит через центр инверсии (рис. 23.38). Опустим из центра инверсии перпендикуляр OM на прямую a.

Пусть $I_O^R(M) = M_1$, т. е. $OM_1 \cdot OM = R^2$. На отрезке OM_1 как на диаметре построим окружность. Покажем, что образ любой точки прямой a лежит на этой окружности.

Пусть X — произвольная точка прямой a, отличная от точки M. Если

[1] Здесь под прямой мы понимаем прямую с выколотой точкой (центром инверсии).

[2] Здесь под окружностью мы понимаем окружность с выколотой точкой (центром инверсии).

$X_1 = I_O^R(X)$, то $OX_1 \cdot OX = R^2$. Имеем: $OM_1 \cdot OM = OX_1 \cdot OX$. Тогда $\frac{OM}{OX} = \frac{OX_1}{OM_1}$. Следовательно, треугольники OX_1M_1 и OMX подобны по второму признаку подобия треугольников. Отсюда $\angle OX_1M_1 = \angle OMX = 90°$. Это означает, что точка X_1 лежит на окружности с диаметром OM_1.

Несложно показать (сделайте это самостоятельно), что каждая точка этой окружности (кроме точки O) является образом некоторой точки прямой a. ■

Свойство 6

Образом окружности, проходящей через центр инверсии, является прямая, не проходящая через центр инверсии.

Докажите это свойство самостоятельно.

Свойство 7

Образом окружности, не проходящей через центр инверсии, является окружность, не проходящая через центр инверсии.

Доказательство

Проведём через точку O — центр инверсии — прямую AB, которая содержит диаметр AB данной окружности (рис. 23.39). Пусть $I_O^R(A) = A_1$, $I_O^R(B) = B_1$. Выберем на данной окружности произвольную точку X, отличную от точек A и B. Тогда $\angle AXB = 90°$.

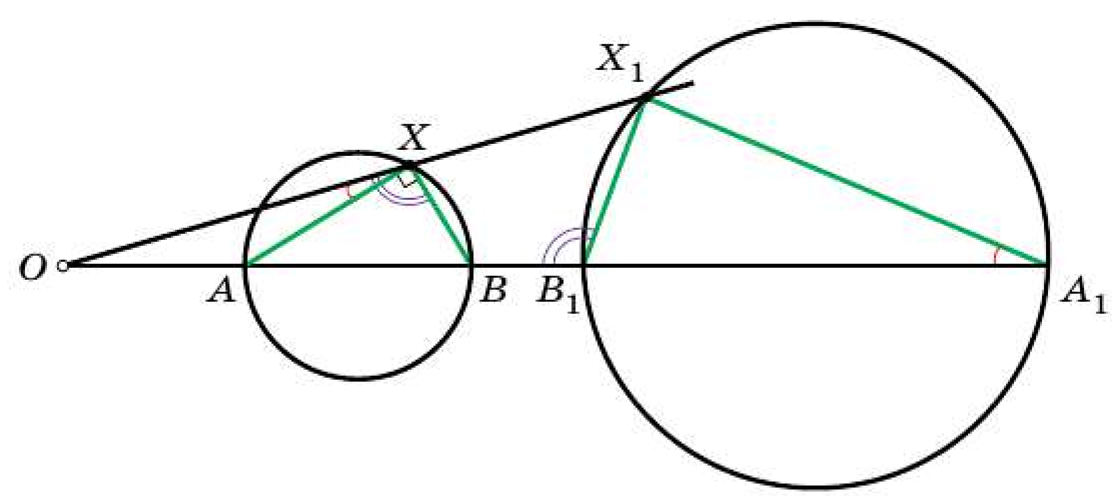


Рис. 23.39

Пусть $I_O^R(X) = X_1$. Имеем: $OA_1 \cdot OA = OB_1 \cdot OB = OX_1 \cdot OX = R^2$. Отсюда следует, что $\triangle OXA \sim \triangle OA_1X_1$, $\triangle OXB \sim \triangle OB_1X_1$.

Тогда $\angle OXA = \angle OA_1X_1$, $\angle OXB = \angle OB_1X_1$. Имеем: $\angle A_1X_1B_1 = \angle OB_1X_1 - \angle OA_1X_1 = \angle OXB - \angle OXA = 90°$. Следовательно, точка X_1 принадлежит окружности с диаметром A_1B_1. Получили, что образ любой точки данной окружности принадлежит окружности с диаметром A_1B_1.

Несложно показать (сделайте это самостоятельно), что каждая точка окружности с диаметром A_1B_1 является образом некоторой точки данной окружности.

Заметим, что мы рассмотрели случай, когда центр инверсии лежит вне данной окружности. Другой случай рассмотрите самостоятельно. ■

Свойство 8

Если $I_O^R(A) = A_1$, $I_O^R(B) = B_1$, то $A_1B_1 = \dfrac{AB \cdot R^2}{OA \cdot OB}$.

Докажите это свойство самостоятельно.

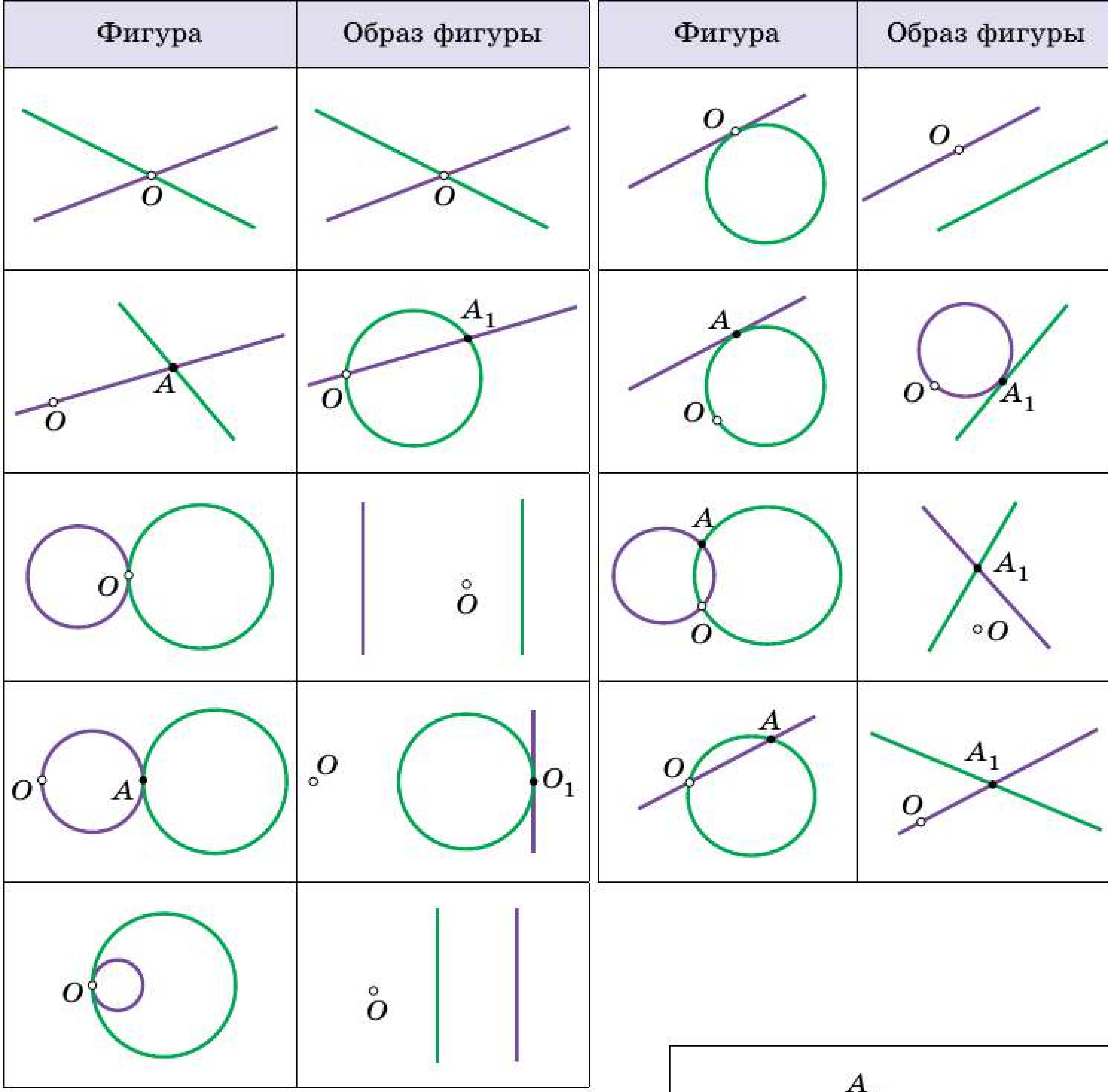
Изучив данный материал, вы убедились, что применение движения и гомотетии является эффективным способом для решения целого ряда задач. Инверсия расширяет круг задач, которые можно решить с помощью преобразований фигуры.

Например, инверсия позволяет с помощью одного лишь циркуля найти середину данного отрезка. Также с помощью инверсии можно решить одну из сложных задач древности — задачу Аполлония: построить с помощью циркуля и линейки окружность, которая касается трёх данных окружностей.

Вы сможете узнать решения этих задач, а также узнать больше об инверсии, если примете участие в работе над проектом «Инверсия и её применение»

Вы знаете, что применение метода координат начинается с выбора системы координат. Аналогично, первый шаг в решении задач с помощью инверсии — это выгодный выбор центра инверсии. Например, если две окружности касаются, то, выбрав в качестве центра инверсии точку касания, мы получим, что образом данных окружностей являются две параллельные прямые.

В таблице приведены примеры фигур и их образов при инверсии с центром в точке O (образ показан схематично, точка A_1 — образ точки A).



Покажем, как с помощью инверсии доказать известную вам теорему Птолемея[1]: *во вписанном четырёхугольнике произведение диагоналей равно сумме произведений противолежащих сторон.*

На рисунке 23.40 изображён четырёхугольник $ABCD$, около которого описана окружность.

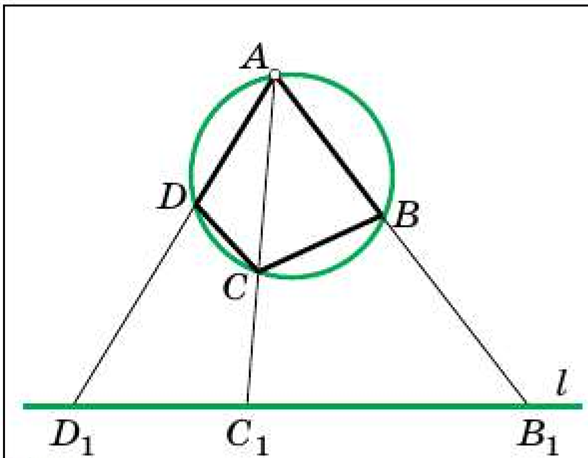


Рис. 23.40

[1] С другим способом доказательства этой теоремы вы ознакомились в 8 классе, см. «Геометрия, 8 класс» § 15.

Примем точку A за центр инверсии, а радиус инверсии R выберем произвольно. Тогда образом описанной окружности является некоторая прямая l.

Пусть $I_O^R(D) = D_1$, $I_O^R(B) = B_1$, $I_O^R(C) = C_1$.

Так как точки B, C и D лежат на описанной окружности, то их образы, точки B_1, C_1 и D_1, лежат на образе этой окружности — прямой l.

По свойству 8 можно записать: $D_1B_1 = \dfrac{DB \cdot R^2}{AD \cdot AB}$, $D_1C_1 = \dfrac{DC \cdot R^2}{AD \cdot AC}$, $C_1B_1 = \dfrac{CB \cdot R^2}{AC \cdot AB}$, где R — радиус инверсии.

Имеем: $D_1B_1 = D_1C_1 + C_1B_1$. Тогда $\dfrac{DB \cdot R^2}{AD \cdot AB} = \dfrac{DC \cdot R^2}{AD \cdot AC} + \dfrac{CB \cdot R^2}{AC \cdot AB}$. Отсюда $DB \cdot AC = DC \cdot AB + CB \cdot AD$.

Итоги главы 5

Обратимое преобразование фигуры

Обратимым преобразованием фигуры называют такое преобразование, при котором различным точкам фигуры соответствуют их различные образы.

Движение (перемещение)

Преобразование фигуры F, сохраняющее расстояние между точками, называют движением (перемещением) фигуры F.

Свойства движения

- При движении фигуры F образами любых её трёх точек, лежащих на одной прямой, являются три точки, лежащие на одной прямой, а образами трёх точек, не лежащих на одной прямой, являются три точки, не лежащие на одной прямой.
- При движении отрезка, луча, прямой, угла образами являются соответственно отрезок, луч, прямая, угол.
- Если f — движение, при котором образом угла ABC является угол $A_1B_1C_1$, то $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$.
- Если f — движение, при котором образом треугольника ABC является треугольник $A_1B_1C_1$, то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.
- Движение является обратимым преобразованием. Преобразование, обратное движению, также является движением.
- Если f и g — движения, то композиция этих преобразований также является движением.

Равные фигуры

Две фигуры называют равными, если существует движение, при котором одна из данных фигур является образом другой.

Параллельный перенос

Если точки X и X_1 таковы, что $\overrightarrow{XX_1} = \vec{a}$, то говорят, что точка X_1 — это образ точки X при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$.

Свойства параллельного переноса

- Параллельный перенос является движением.
- Если фигура F_1 — образ фигуры F при параллельном переносе, то $F_1 = F$.

Осевая симметрия

Точки A и A_1 называют симметричными относительно прямой l, если прямая l является серединным перпендикуляром отрезка AA_1. Если точка A принадлежит прямой l, то её считают симметричной самой себе относительно прямой l.

Свойства осевой симметрии

- Осевая симметрия является движением.
- Если фигуры F и F_1 симметричны относительно прямой, то $F_1 = F$.
- Осевая симметрия является обратимым преобразованием. Если $S_l(F) = F_1$, то $S_l(F_1) = F$, т. е. $S_l \circ S_l(F) = F$.
- Композиция двух осевых симметрий с параллельными осями является параллельным переносом.
- Любое движение фигуры является композицией не более чем трёх осевых симметрий.

Фигура, имеющая ось симметрии

- Фигуру называют симметричной относительно прямой l, если $S_l(F) = F$. Прямую l называют осью симметрии фигуры.
- Если фигура имеет ровно две оси симметрии, то эти оси перпендикулярны.
- Если многоугольник имеет две или более осей симметрии, то все они пересекаются в одной точке.

Центральная симметрия

Точки A и A_1 называют симметричными относительно точки O, если точка O является серединой отрезка AA_1. Точку O считают симметричной самой себе.

Свойства центральной симметрии

- Центральная симметрия является движением.
- Если фигуры F и F_1 симметричны относительно точки, то $F = F_1$.
- Центральная симметрия является обратимым преобразованием. Если $S_O(F) = F_1$, то $S_O(F_1) = F$, т. е. $S_O \circ S_O(F) = F$.

Фигура, имеющая центр симметрии

Фигуру называют симметричной относительно точки O, если $S_O(F) = F$. Точку O называют центром симметрии фигуры.

Свойства поворота

- Поворот является движением.
- Если фигура F_1 — образ фигуры F при повороте, то $F_1 = F$.
- Композицией двух осевых симметрий с непараллельными осями является поворот вокруг точки пересечения осей.

Гомотетия

Если точки O, X и X_1 таковы, что $\overrightarrow{OX_1} = k\overrightarrow{OX}$, где $k \neq 0$, то говорят, что точка X_1 — это образ точки X при гомотетии с центром O и коэффициентом k.

Свойства гомотетии

- При гомотетии фигуры F с коэффициентом k все расстояния между её точками изменяются в $|k|$ раз, т. е. если A и B — произвольные точки фигуры F, а A_1 и B_1 — их соответствующие образы при гомотетии с коэффициентом k, то $A_1B_1 = |k|AB$.
- При гомотетии фигуры F образами любых её трёх точек, лежащих на одной прямой, являются три точки, лежащие на одной прямой, а образами трёх точек, не лежащих на одной прямой, являются три точки, не лежащие на одной прямой.
- При гомотетии отрезка, луча, прямой образами являются соответственно отрезок, луч, прямая. При гомотетии угла образом является угол, равный данному. При гомотетии треугольника образом является треугольник, подобный данному.

Подобие

Две фигуры называют подобными, если одну из них можно получить из другой в результате композиции двух преобразований: гомотетии и движения.

Площади подобных многоугольников

Отношение площадей подобных многоугольников равно квадрату коэффициента подобия.

глава

6 Начальные сведения по стереометрии

- При изучении этой главы вы получите первичные представления о пирамиде, параллелепипеде, призме, сфере, шаре, цилиндре, конусе, их элементах и простейших свойствах.
- Вы изучите формулы для вычисления объёмов и площадей поверхностей прямой призмы, пирамиды, цилиндра, конуса, шара.

§ 24 Прямая призма. Пирамида

Вы завершили изучение курса планиметрии — раздела геометрии, изучающего свойства фигур, расположенных в одной плоскости. Однако большинство окружающих нас объектов не являются плоскими. Раздел геометрии, изучающий свойства фигур в **пространстве**, называют **стереометрией** (в переводе с греческого «стереос» — пространственный).

Курс стереометрии вы будете изучать в 10—11 классах. Сейчас вы ознакомитесь с начальными сведениями этого раздела геометрии.

В стереометрии наряду с точками и прямыми рассматривают **плоскости**. Представление о плоскости дают поверхность стола, футбольное поле, поверхность водоёма в безветренную погоду. С этой фигурой вы ознакомились в 5 классе.

В стереометрии, кроме точек, прямых и плоскостей, рассматривают **геометрические тела**. Примерами тел являются **многогранники** (рис. 24.1). **Поверхность** многогранника состоит из многоугольников. Их называют **гранями многогранника**. Стороны многоугольников называют **рёбрами многогранника**, а вершины — **вершинами многогранника**.

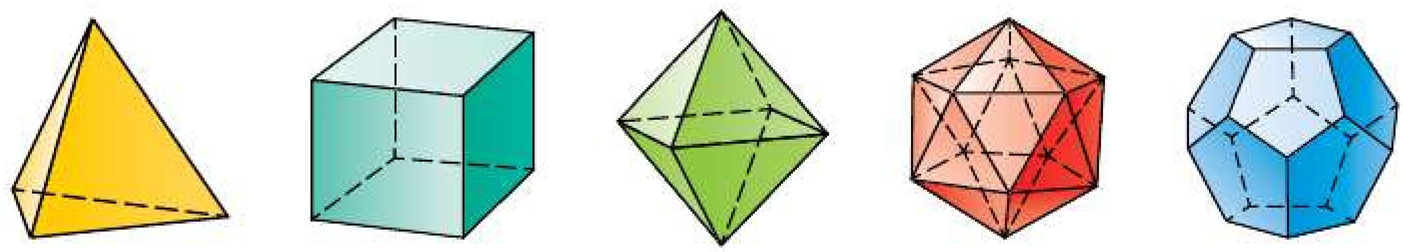


Рис. 24.1

В 5 классе вы ознакомились с одним из видов многогранника — прямоугольным параллелепипедом и его частным видом — кубом. На рисунке 24.2 изображён прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Прямоугольный параллелепипед является частным видом многогранника, который называют **призмой**.

Многогранник, изображённый на рисунке 24.3, является **шестиугольной призмой**. Две его грани $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — равные шестиугольники. Их называют **основаниями призмы**. Остальные шесть граней — это параллелограммы. Их называют **боковыми гранями призмы**.

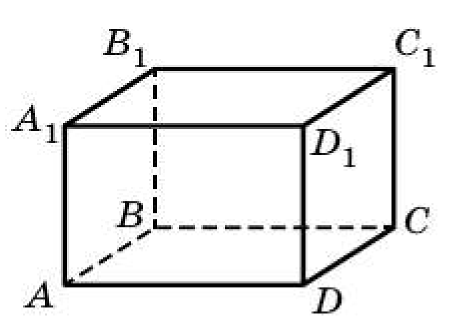


Рис. **24.2**

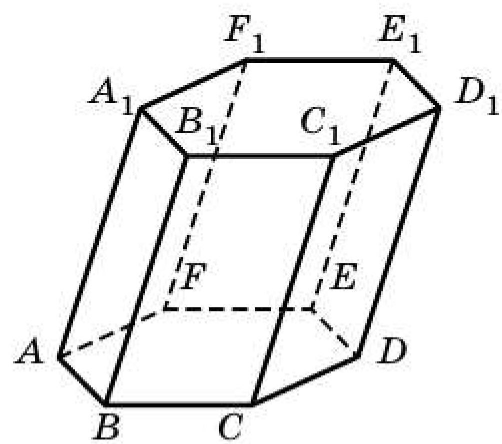


Рис. **24.3**

Рёбра призмы, принадлежащие основаниям, называют **рёбрами оснований призмы**, а остальные рёбра — **боковыми рёбрами призмы**. Все боковые рёбра призмы параллельны и равны.

Перечисленные элементы призмы указаны на рисунке 24.4.

Аналогично можно говорить о n-угольной призме.

На рисунке 24.5 изображена призма, боковые грани которой являются прямоугольниками. Такую призму называют **прямой**.

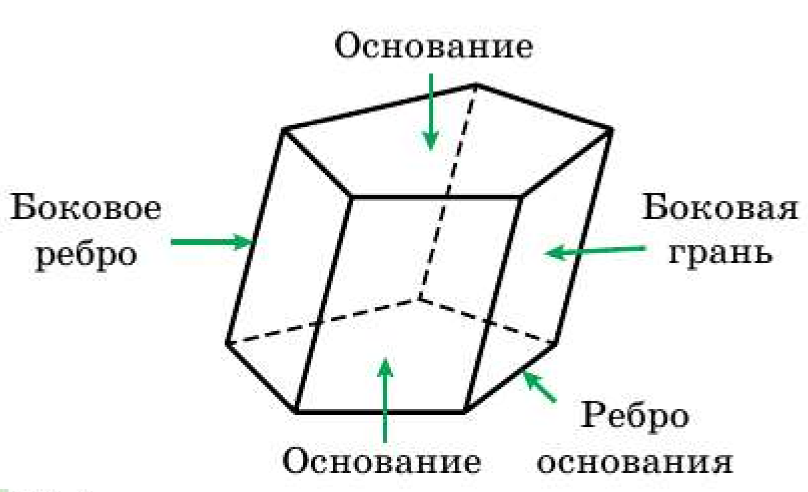


Рис. **24.4**

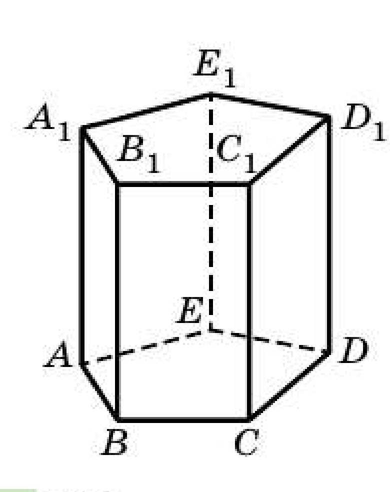


Рис. **24.5**

Прямоугольный параллелепипед — это частный вид прямой призмы.

Площадь боковой поверхности призмы — это сумма площадей всех её боковых граней.

Теорема 24.1

Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра её основания и длины бокового ребра.

Доказательство

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — стороны основания прямой призмы, h — длина бокового ребра, $P_{\text{осн}}$ — периметр основания, $S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности. Поскольку боковые грани прямой призмы — прямоугольники, то:

$$S_{\text{бок}} = a_1h + a_2h + \ldots + a_nh = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\,h = P_{\text{осн}}\,h. ■$$

Площадь поверхности призмы — это сумма площадей всех её граней.

Обозначив площадь основания $S_{\text{осн}}$, можно записать очевидную формулу для нахождения площади S поверхности призмы:

$$S = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}.$$

Каждое геометрическое тело имеет определенный объём. С такой величиной, как объём, вы часто встречаетесь в повседневной жизни: объём топливного бака, объём бассейна, объём классной комнаты, показатели потребления газа или воды на счётчиках и т. д.

Опыт подсказывает, что одинаковые ёмкости имеют одинаковые объёмы; объём ёмкости, состоящей из нескольких частей, равен сумме объёмов этих частей.

Эти примеры иллюстрируют такие *свойства объёма фигуры*:

1) *равные фигуры имеют равные объёмы*;

2) *объём фигуры равен сумме объёмов фигур, из которых она состоит*.

Как и в случаях с другими величинами (длина, площадь), следует ввести единицу измерения объёма.

За единицу измерения объёма принимают куб, ребро которого равно единичному отрезку. Такой куб называют **единичным**.

Объём V прямой призмы вычисляют по формуле

$$\boldsymbol{V = S_{\text{осн}} \cdot h},$$

где $S_{\text{осн}}$ — площадь основания призмы, h — длина бокового ребра.

Эта формула будет доказана в курсе стереометрии.

На рисунке 24.6 изображён многогранник, одна грань которого — многоугольник, а остальные — треугольники, имеющие общую вершину. Такой многогранник называют **пирамидой.** Общую вершину треугольников называют **вершиной пирамиды.** Грань, не содержащую вершину пирамиды, называют **основанием пирамиды**, остальные грани — **боковыми гранями пирамиды.**

Рёбра, принадлежащие основанию, называют **рёбрами основания пирамиды**, остальные рёбра — **боковыми рёбрами пирамиды.**

На рисунке 24.7 изображены треугольная пирамида $SABC$ и четырёхугольная пирамида $SABCD$.

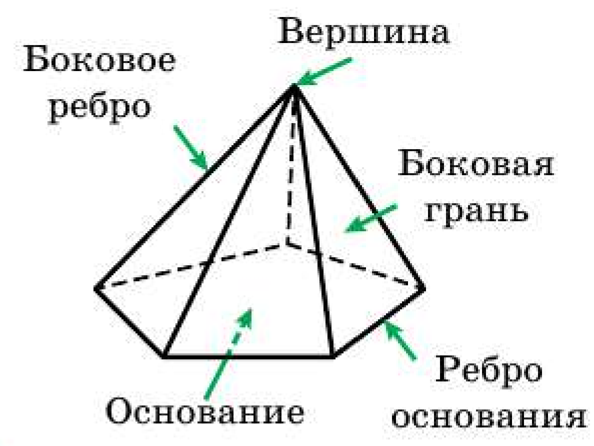


Рис. 24.6

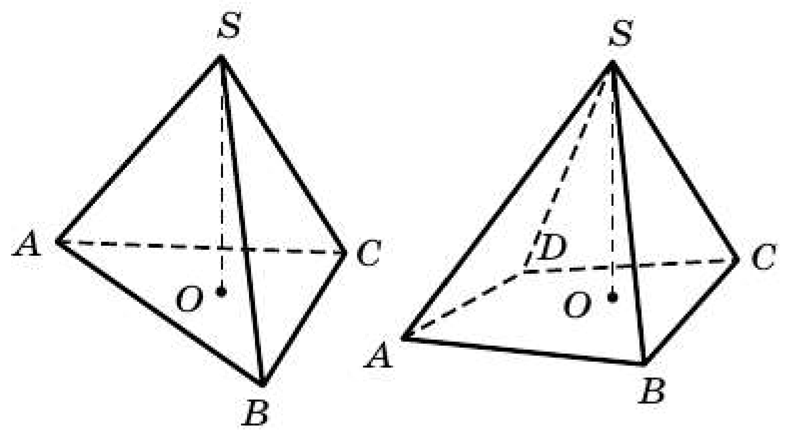


Рис. 24.7

Площадь поверхности пирамиды — это сумма площадей всех её граней.

В повседневной жизни мы говорим: «Флагшток перпендикулярен поверхности земли» (рис. 24.8), «мачты парусника перпендикулярны поверхности палубы» (рис. 24.9), «шуруп вкручивают в доску перпендикулярно её поверхности» (рис. 24.10).

Рис. 24.8

Рис. 24.9

Рис. 24.10

Рис. 24.11

Эти примеры дают представление о перпендикуляре, опущенном из точки на плоскость.

Перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания, называют **высотой** пирамиды. На рисунке 24.7 отрезок SO — высота пирамиды.

Объём V пирамиды вычисляют по формуле

$$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h,$$

где $S_{осн}$ — площадь основания пирамиды, h — длина высоты пирамиды.

Эта формула будет доказана в курсе стереометрии.

Связь между частными видами многогранников иллюстрирует схема, изображённая на рисунке 24.11.

?

1. Из каких фигур состоит поверхность многогранника?
2. Перечислите элементы многогранника.
3. Какой геометрической фигурой является боковая грань призмы?
4. Каково взаимное расположение боковых рёбер призмы?
5. Какой геометрической фигурой является боковая грань прямой призмы?
6. Что такое площадь боковой поверхности призмы?
7. Что такое площадь поверхности призмы?
8. По какой формуле вычисляют объём прямой призмы?
9. Поясните, какой многогранник называют пирамидой.
10. Перечислите элементы пирамиды.
11. Что такое площадь поверхности пирамиды?
12. Что называют высотой пирамиды?
13. По какой формуле вычисляют объём пирамиды?

Упражнения

24.1. На рисунке 24.12 изображён прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажите:
1) основания параллелепипеда;
2) боковые грани параллелепипеда;
3) боковые рёбра параллелепипеда;
4) рёбра нижнего основания параллелепипеда;
5) рёбра, параллельные ребру AB;
6) ребра, параллельные ребру BB_1.

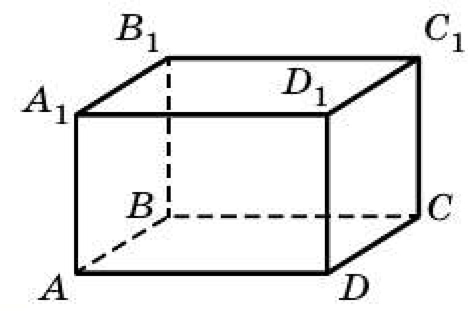


Рис. 24.12

24.2. На рисунке 24.13 изображена прямая призма $ABCA_1B_1C_1$. Укажите:
1) основания призмы;
2) боковые грани призмы;
3) боковые рёбра призмы;
4) рёбра основания призмы;
5) все пары параллельных рёбер призмы.

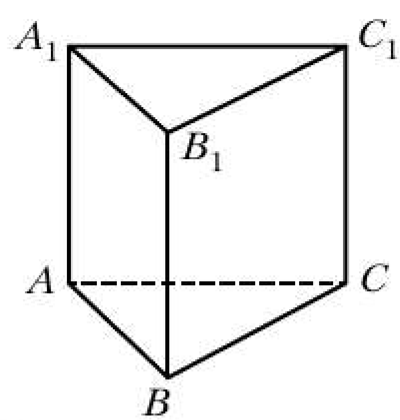


Рис. 24.13

24.3. На рисунке 24.14 изображена пирамида $MABC$. Укажите:
1) основание пирамиды;
2) вершину пирамиды;
3) боковые грани пирамиды;
4) боковые рёбра пирамиды;
5) рёбра основания пирамиды.

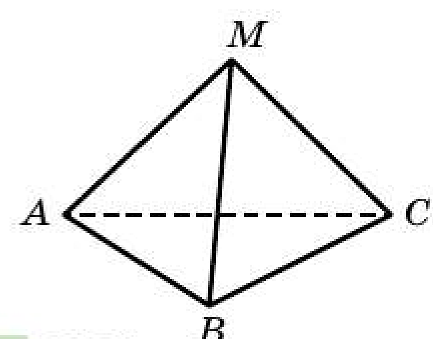


Рис. 24.14

24.4. На рисунке 24.15 изображена пирамида $SABCD$. Укажите:
1) основание пирамиды;
2) вершину пирамиды;
3) боковые грани пирамиды;
4) боковые рёбра пирамиды;
5) рёбра основания пирамиды.

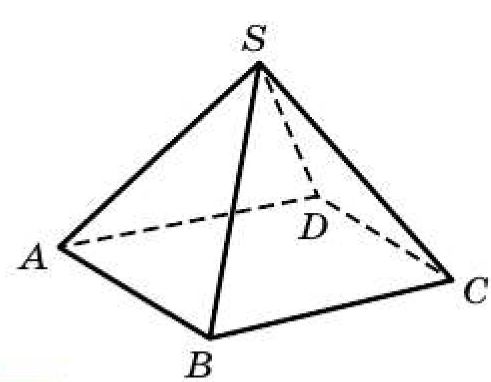


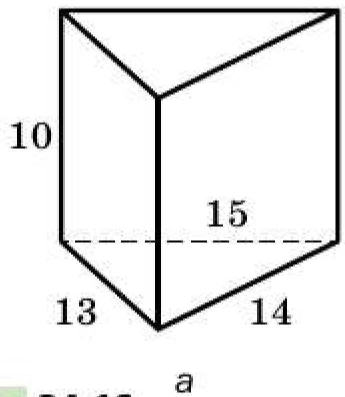
Рис. 24.15

24.5. Найдите площадь боковой поверхности, площадь поверхности и объём прямой треугольной призмы, основанием которой является правильный треугольник со стороной 6 см, а боковое ребро равно 4 см.

24.6. Найдите площадь боковой поверхности, площадь поверхности и объём прямой четырёхугольной призмы, основанием которой является квадрат со стороной 7 см, а боковое ребро равно 6 см.

24.7. Найдите площадь боковой поверхности, площадь поверхности и объём прямой призмы, изображённой на рисунке 24.16 (длины отрезков даны в сантиметрах).

24.8. Найдите площадь боковой поверхности, площадь поверхности и объём прямой призмы, изображённой на рисунке 24.17 (длины отрезков даны в сантиметрах).



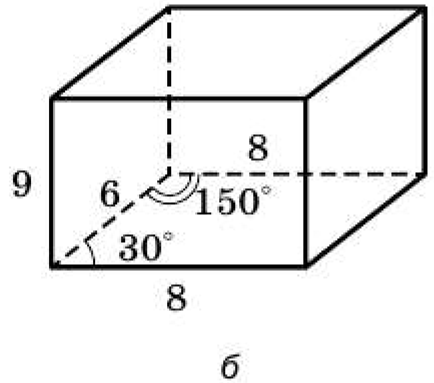


Рис. **24.16**

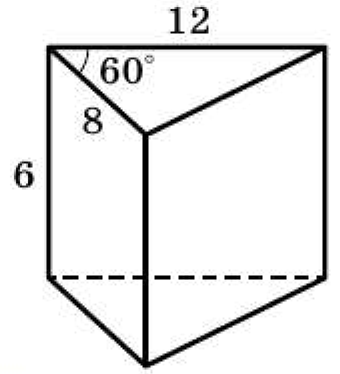


Рис. **24.17**

24.9. Вычислите объём пирамиды $MABC$ (рис. 24.18), основание которой — треугольник ABC, $BC = 4{,}8$ см, AK — высота треугольника ABC, $AK = 3{,}5$ см, MO — высота пирамиды, $MO = 4{,}5$ см.

24.10. Вычислите объём пирамиды $MABCD$ (рис. 24.19), основание которой — квадрат $ABCD$ со стороной 6 см, ME — высота пирамиды, $ME = 7{,}2$ см.

24.11. Вычислите объём пирамиды $AMNKP$ (рис. 24.20), основание которой — прямоугольник $MNKP$, $MN = 1{,}2$ см, $NK = 2{,}6$ см, AD — высота пирамиды, $AD = 2{,}5$ см.

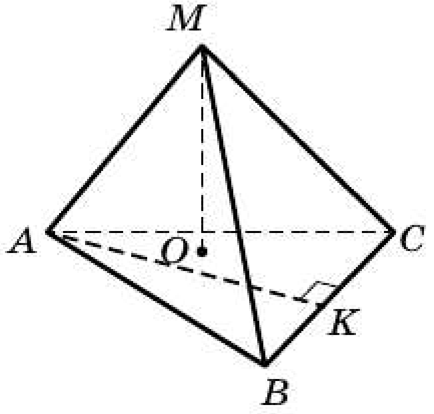


Рис. **24.18**

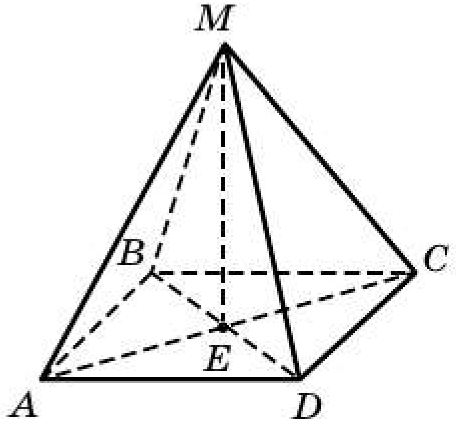


Рис. **24.19**

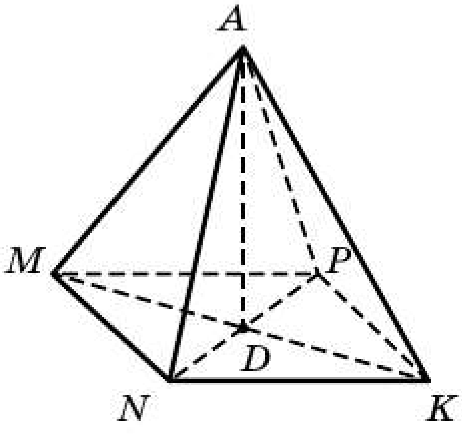


Рис. **24.20**

24.12. Классная комната имеет форму прямоугольного параллелепипеда, измерения которого равны 8,5 м, 6 м и 3,6 м. Можно ли в этой комнате разместить на урок 30 учащихся, если в соответствии с санитарными нормами на одного учащегося должно приходиться 6 м^3 воздуха?

24.13. Поперечное сечение чугунной трубы имеет форму квадрата. Внешняя ширина трубы равна 30 см, а толщина стенок — 5 см. Найдите массу погонного метра трубы, если плотность чугуна составляет $7{,}3 \cdot 10^3$ кг/м^3.

24.14. Поперечное сечение канавы имеет форму равнобокой трапеции, основания которой равны 1 м и 0,8 м, а высота — 0,6 м. Сколько понадобится рабочих, чтобы за 4 ч выкопать такую канаву длиной 15 м, если за час один рабочий выкапывает 0,75 м^3 грунта?

24.15. Слиток меди длиной 50 см имеет форму прямой призмы, основанием которой является равнобокая трапеция, параллельные стороны которой равны 6 см и 14 см, а боковая сторона — 8,5 см. Установите, есть ли внутри слитка пустоты или он является сплошным, если масса слитка равна 32 кг, а плотность меди — $9{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3.

24.16. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды $SABC$, если $SA = SB = SC = 8$ см, $\angle ASB = \angle ASC = \angle CSB = 45°$.

24.17. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды $SABCD$, если $SA = SB = SC = SD = 6$ см, $\angle ASB = \angle BSC = \angle CSD = \angle ASD = 30°$.

24.18. Основанием пирамиды является ромб, сторона которого равна 10 см, а одна из диагоналей — 16 см. Найдите объём пирамиды, если её высота равна 11 см.

24.19. Основанием пирамиды является треугольник со сторонами 17 см, 17 см и 16 см. Найдите объём пирамиды, если её высота равна 20 см.

§ 25 Цилиндр. Конус. Шар

В повседневной жизни мы часто встречаемся с предметами, имеющими форму **цилиндра**: консервная банка (рис. 25.1), хоккейная шайба (рис. 25.2), колонны здания (рис. 25.3), бочка (рис. 25.4)

Цилиндр можно представить как тело, полученное в результате вращения прямоугольника $ABCD$ вокруг одной из его сторон, например стороны AB (рис. 25.5). Прямую AB называют **осью цилиндра**.

Рис. 25.1

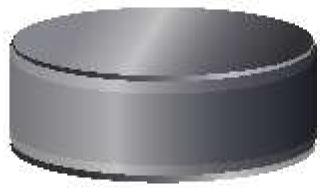


Рис. 25.2

Рис. 25.3

Рис. 25.4

Стороны BC и AD, вращаясь, образуют равные круги, которые называют **основаниями цилиндра**. При вращении стороны CD образуется **боковая поверхностью цилиндра**.

Все отрезки, положения которых может занять отрезок CD при вращении прямоугольника, называют **образующими цилиндра**. Например, на рисунке 25.5 отрезки CD и C_1D_1 — образующие цилиндра. Все образующие цилиндра равны и параллельны. Кроме того, каждая образующая перпендикулярна плоскостям оснований цилиндра.

Если боковую поверхность цилиндра разрезать по одной из его образующих, а потом развернуть её на плоскости, то получим прямоугольник. Одна из его сторон равна образующей, а длина другой стороны равна длине окружности, ограничивающей основание цилиндра (рис. 25.6). Полученный прямоугольник называют **развёрткой боковой поверхности цилиндра**.

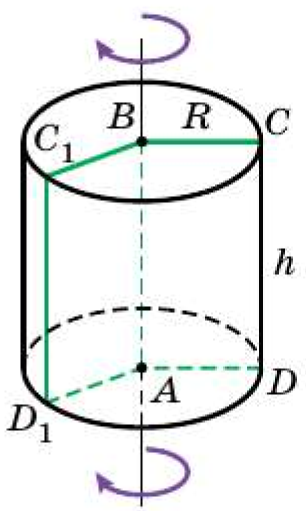


Рис. 25.5

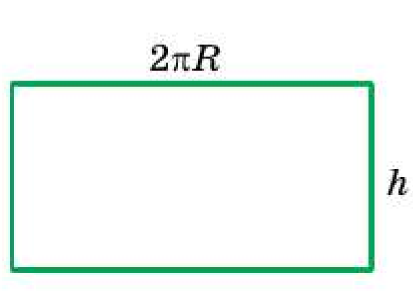


Рис. 25.6

Площадь боковой поверхности цилиндра $S_{бок}$ равна площади её развертки. Имеем:

$$S_{бок} = 2\pi Rh,$$

где R — радиус основания цилиндра, h — длина его образующей.

Площадь S поверхности цилиндра равна сумме площади боковой поверхности и площадей его оснований:

$$S = S_{бок} + 2S_{осн},$$

где $S_{осн}$ — площадь основания цилиндра.

Объём V цилиндра вычисляют по формуле

$$V = \pi R^2 h,$$

где R — радиус основания цилиндра, h — длина его образующей.

Конус можно представить как тело, полученное в результате вращения прямоугольного треугольника ABC вокруг одного из его катетов, например катета AC (рис. 25.7).

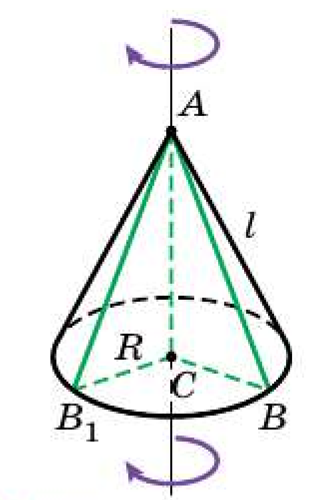


Рис. **25.7**

Катет BC, вращаясь, образует круг, который называют **основанием конуса**. При вращении гипотенузы AB образуется **боковая поверхность конуса**.

Все отрезки, положения которых может занять отрезок AB при вращении прямоугольного треугольника, называют **образующими конуса**. Например, на рисунке 25.7 отрезки AB и AB_1 — образующие конуса. Все образующие конуса равны.

Прямую AC называют **осью конуса**, отрезок AC — **высотой конуса**, точку A — **вершиной конуса**. Высота конуса перпендикулярна плоскости его основания.

Если боковую поверхность конуса разрезать по одной из его образующих, а затем развернуть её на плоскости, то получим сектор. Радиус этого сектора равен длине l образующей конуса, а длина дуги, ограничивающей сектор, — длине окружности, ограничивающей основание конуса (рис. 25.8).

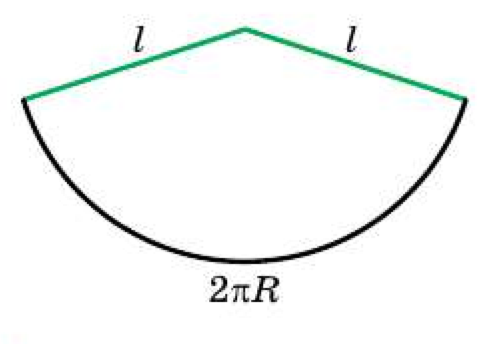


Рис. **25.8**

Полученный сектор называют **развёрткой боковой поверхности конуса**.

Площадь боковой поверхности конуса $S_{бок}$ равна площади её развёртки, которую вычисляют по формуле

$$\boxed{S_{бок} = \pi R l,}$$

где R — радиус основания конуса, l — длина его образующей.

Площадь S поверхности конуса равна сумме площади боковой поверхности и площади его основания:

$$\boxed{S = S_{бок} + S_{осн},}$$

где $S_{осн}$ — площадь основания конуса.

Объём V конуса вычисляют по формуле

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi R^2 h,}$$

где R — радиус основания конуса, h — длина его высоты.

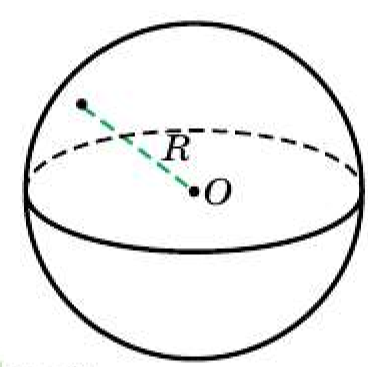


Рис. 25.9

Множество точек пространства, удалённых от данной точки на данное расстояние R, образуют фигуру, которую называют **сферой** (рис. 25.9). Данную точку называют **центром сферы**, а число R — **радиусом сферы**. Любой отрезок, соединяющий центр сферы с точкой сферы, также называют радиусом сферы. На рисунке 25.9 точка O — центр сферы, R — радиус.

Тело, представляющее часть пространства, ограниченную сферой, вместе со сферой, называют **шаром**. Сферу, ограничивающую шар, называют **поверхностью шара**. Центр и радиус поверхности шара называют также центром и радиусом шара.

Шар можно представить как тело, полученное в результате вращения круга вокруг одного из диаметров (рис. 25.10).

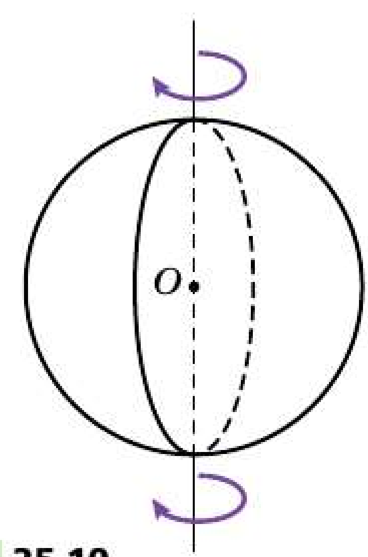


Рис. 25.10

Площадь S поверхности шара, т. е. площадь сферы, вычисляют по формуле

$$S = 4\pi R^2,$$

где R — радиус шара.

Объём V шара вычисляют по формуле

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

где R — радиус шара.

1. Перечислите элементы цилиндра.
2. Какая геометрическая фигура является развёрткой боковой поверхности цилиндра?
3. Чему равна площадь поверхности цилиндра?
4. По какой формуле вычисляют объём цилиндра?
5. Перечислите элементы конуса.
6. Какая геометрическая фигура является развёрткой боковой поверхности конуса?
7. Чему равна площадь поверхности конуса?
8. По какой формуле вычисляют объём конуса?
9. Какую фигуру называют сферой?
10. Перечислите элементы сферы.
11. Какую фигуру ограничивает сфера?
12. По какой формуле вычисляют площадь поверхности шара?
13. По какой формуле вычисляют объём шара?

Упражнения

25.1. На рисунке 25.11 изображён цилиндр. Укажите:

1) ось цилиндра;
2) образующую цилиндра;
3) радиус нижнего основания цилиндра;
4) радиус верхнего основания цилиндра.

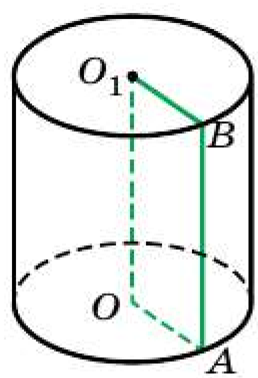


Рис. 25.11

25.2. Радиус основания цилиндра равен 6 см, а его образующая — 8 см. Найдите площадь боковой поверхности, площадь поверхности и объём цилиндра.

25.3. Найдите площадь боковой поверхности, площадь поверхности и объём цилиндра, развёртка которого изображена на рисунке 25.12 (длины отрезков даны в сантиметрах).

25.4. На рисунке 25.13 изображён конус. Укажите:
1) вершину конуса;
2) центр его основания;
3) образующую конуса;
4) радиус основания конуса;
5) высоту конуса.

25.5. Радиус основания конуса равен 4 см, а его образующая — 7 см. Найдите площадь боковой поверхности и площадь поверхности конуса.

25.6. Найдите площадь поверхности конуса, развёртка которого изображена на рисунке 25.14 (длины отрезков даны в сантиметрах).

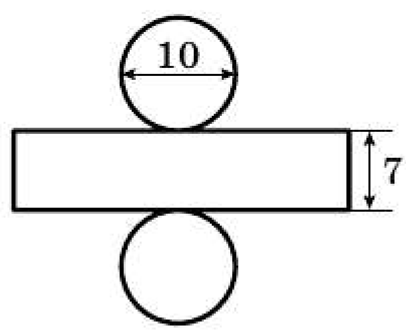


Рис. **25.12**

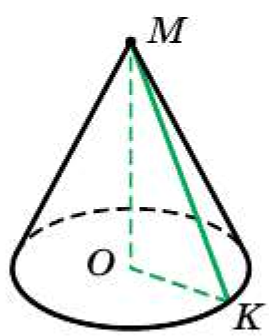


Рис. **25.13**

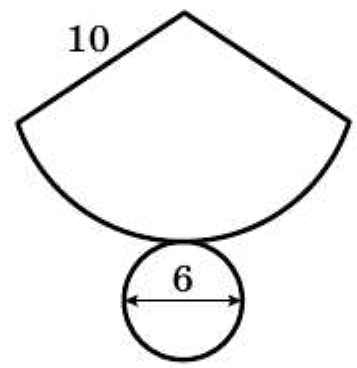


Рис. **25.14**

25.7. Найдите объём конуса, высота которого равна 12 см, а радиус основания — 3 см.

25.8. Найдите площадь поверхности и объём шара, радиус которого равен 3 см.

25.9. Прямоугольник, стороны которого равны 12 см и 5 см, вращается вокруг большей стороны. Найдите площадь поверхности и объём цилиндра, образовавшегося при этом.

25.10. Масса 10 м медного провода кругового сечения равна 106,8 г. Найдите диаметр провода, если плотность меди составляет $8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3.

25.11. Определите давление кирпичной колонны цилиндрической формы высотой 3 м на фундамент, если диаметр колонны равен 1,2 м, а масса 1 м^3 кирпича равна 1,8 т.

25.12. Диаметр основания конуса равен 16 см, а его образующая — 17 см. Найдите площадь поверхности и объём конуса.

25.13. Прямоугольный треугольник с катетами 12 см и 16 см вращается вокруг меньшего катета. Найдите площадь боковой поверхности и объём конуса, образовавшегося при этом.

25.14. Зерно ссыпали в горку конической формы высотой 1,2 м. Какова масса этой горки, если радиус её основания равен 2 м, а масса 1 $м^3$ зерна составляет 750 кг?

25.15. Жидкость из полного сосуда конической формы, высота которого равна 24 см, а радиус основания — 6 см, перелили в сосуд цилиндрической формы, радиус основания которого равен 8 см. Определите высоту уровня жидкости в сосуде цилиндрической формы.

25.16. Стог сена имеет форму цилиндра с коническим верхом (рис. 25.15). Радиус его основания равен 1,5 м, высота — 3 м, причём высота цилиндрической части стога — 2,4 м. Найдите массу стога, если масса 1 $м^3$ сена составляет 30 кг.

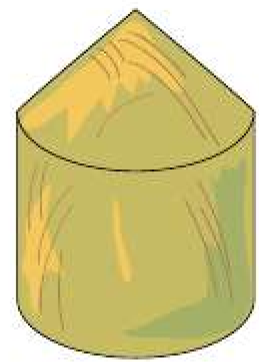


Рис. **25.15**

25.17. Как изменятся площадь поверхности и объём шара, если его радиус увеличить в 2 раза?

25.18. Радиус одного шара равен 3 см, а другого — 4 см. Найдите отношение площадей поверхностей и отношение объёмов данных шаров.

25.19. Диаметр внешней сферы железного пустотелого шара равен 12 см, а диаметр внутренней сферы — 10 см. Найдите массу шара, если плотность железа равна $7{,}9 \cdot 10^3$ $кг/м^3$.

Площадь боковой поверхности призмы

- Площадь боковой поверхности призмы — это сумма площадей всех её боковых граней.
- Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра её основания и длины бокового ребра.

Площадь поверхности призмы

Площадь поверхности призмы — это сумма площадей всех её граней.

$S = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$.

Объём прямой призмы

$V = S_{\text{осн}} \cdot h$, где V — объём прямой призмы, $S_{\text{осн}}$ — площадь основания призмы, h — длина бокового ребра.

Объём пирамиды

$V = \dfrac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$, где V — объём пирамиды, $S_{\text{осн}}$ — площадь основания пирамиды, h — длина высоты пирамиды.

Площадь боковой поверхности цилиндра

$S_{\text{бок}} = 2\pi Rh$, где R — радиус основания цилиндра, h — длина его образующей.

Площадь поверхности цилиндра

Площадь S поверхности цилиндра равна сумме площади боковой поверхности и площадей его оснований: $S = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$.

Объём цилиндра

$V = \pi R^2 h$, где V — объём цилиндра, R — радиус основания цилиндра, h — длина его образующей.

Площадь боковой поверхности конуса

$S_{\text{бок}} = \pi Rl$, где R — радиус основания конуса, l — длина его образующей.

Площадь поверхности конуса

Площадь S поверхности конуса равна сумме площади боковой поверхности и площади его основания: $S = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$.

Объём конуса

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$, где V — объём конуса, R — радиус основания конуса, h — длина его высоты.

Площадь сферы

$S = 4\pi R^2$, где R — радиус шара.

Объём шара

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$, где V — объём шара, R — радиус шара.

1. Треугольники

26.1. Некоторая прямая пересекает параллельные прямые a и b в точках A и B соответственно. Биссектриса одного из образовавшихся углов с вершиной B пересекает прямую a в точке C. Найдите отрезок AC, если $AB = 1$.

26.2. Прямая, проведённая через вершину A треугольника ABC перпендикулярно его медиане BD, делит эту медиану пополам. Найдите отношение сторон AB и AC.

26.3. Равные отрезки AB и CD пересекаются в точке O. Известно, что $AO : OB = CO : OD = 1 : 2$. Прямые AD и BC пересекаются в точке M. Докажите, что треугольник DMB равнобедренный.

26.4. Через вершины A и C треугольника ABC проведены прямые, перпендикулярные биссектрисе угла ABC и пересекающие прямые CB и BA в точках K и M соответственно. Найдите AB, если $BM = 8$ см, $KC = 1$ см.

26.5. Основание равнобедренного треугольника составляет четверть его периметра. Из произвольной точки основания проведены прямые, параллельные боковым сторонам. Во сколько раз периметр треугольника больше периметра отсечённого параллелограмма?

26.6. В треугольнике ABC известно, что $AB = 4$ см, $AC = 6$ см. Из вершины B опущен перпендикуляр BH на биссектрису угла A. Найдите отрезок MH, где точка M — середина стороны BC.

26.7. В треугольнике ABC на стороне AB отметили точку K. Отрезок KE — биссектриса треугольника AKC, отрезок KH — высота треугольника BKC. Найдите отрезок BC, если известно, что $\angle EKH = 90°$ и $HC = 5$ см.

26.8. Прямая, проведённая через вершину C треугольника ABC параллельно его биссектрисе BD, пересекает продолжение стороны AB в точке M. Найдите углы треугольника MBC, если $\angle ABC = 100°$.

26.9. На стороне BC равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) отметили точку M. Отрезок AM делит треугольник ABC на два равнобедренных треугольника с основаниями AB и MC. Найдите угол B.

26.10. В треугольнике ABC биссектриса угла C пересекает сторону AB в точке M, а биссектриса угла A пересекает отрезок CM в точке K. Оказалось, что отрезки CM и AK разделили треугольник ABC на три равнобедренных треугольника. Найдите углы треугольника ABC.

26.11. В треугольнике ABC проведены высота AH и медиана BM. Отрезок MH пересекает биссектрису CK в её середине. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

26.12. На сторонах AB и BC треугольника ABC построены во внешнюю сторону квадраты $ABDE$ и $BCFG$. Оказалось, что $DG \parallel AC$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

26.13. Катеты прямоугольного треугольника равны 18 см и 24 см. Найдите биссектрису треугольника, проведённую из вершины меньшего острого угла.

26.14. Медианы AM и CK треугольника ABC перпендикулярны. Найдите стороны треугольника, если $AM = 9$ см и $CK = 12$ см.

26.15. В треугольнике ABC медианы BM и CK перпендикулярны и пересекаются в точке O. Найдите отрезок AO, если $BM = 36$ см и $CK = 15$ см.

26.16. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC$, отрезки BD и AM — высоты треугольника, $BD : AM = 3 : 1$. Найдите $\cos C$.

26.17. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC$, отрезки BD и CK — высоты треугольника, $\cos A = \frac{3}{7}$. Найдите отношение $CK : BD$.

26.18. Найдите отношение площадей S_1 и S_2 треугольников, изображённых на рисунке 26.1 (длины отрезков даны в сантиметрах).

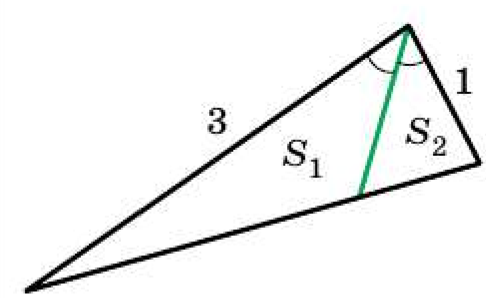


Рис. **26.1**

26.19. Отрезок AD — биссектриса треугольника ABC, площадь треугольника ABD равна 12 см^2, а площадь треугольника ACD — 20 см^2. Найдите отношение стороны AB к стороне AC.

26.20. На медиане AM треугольника ABC отметили точку D так, что $AD : DM = 1 : 3$. Через точку D провели прямую, параллельную стороне AC. В каком отношении эта прямая делит сторону BC, считая от вершины C?

26.21. На медиане BD треугольника ABC отметили точку M так, что $BM : MD = 3 : 2$. Прямая AM пересекает сторону BC в точке E. В каком отношении точка E делит сторону BC, считая от вершины B?

26.22. Медианы AD и BM треугольника ABC пересекаются в точке O. Через точку O проведена прямая, параллельная стороне AC, которая пересекает сторону BC в точке K. Найдите отрезки BD, DK и KC, если $BC = 18$ см.

26.23. Катеты прямоугольного треугольника равны 6 см и 8 см. Найдите расстояние от вершины меньшего острого угла треугольника до центра вписанной окружности.

26.24. Биссектриса угла A треугольника ABC ($\angle C = 90°$) делит катет BC на отрезки длиной 6 см и 10 см. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A, C и точку пересечения этой биссектрисы с катетом BC.

26.25. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$). На луче AC отметили точки D и E так, что $AC = 2\,AD$, $AE = 2AC$. Докажите, что луч BC является биссектрисой угла DBE.

26.26. Докажите, что для треугольника ABC выполняется неравенство $AB \geqslant (BC + AC)\sin\dfrac{C}{2}$.

26.27. В треугольник, сторона которого равна a, а высота, проведённая к этой стороне, равна h, вписан квадрат так, что две его вершины лежат на данной стороне треугольника. Найдите сторону квадрата.

26.28. В треугольнике ABC сторона AB и высота CK равны соответственно 30 см и 10 см. В треугольник ABC вписан прямоугольный равнобедренный треугольник так, что его гипотенуза параллельна стороне AB, а вершина прямого угла лежит на этой стороне. Найдите гипотенузу этого прямоугольного треугольника.

26.29. В треугольник вписан ромб так, что один угол у них общий, а противолежащая вершина делит сторону треугольника в отношении 2 : 3. Диагонали ромба равны m и n. Найдите стороны треугольника, содержащие стороны ромба.

26.30. В треугольник, одна из сторон которого равна a, а высота, проведённая к этой стороне, равна h, вписан квадрат так, что две его вершины лежат на данной стороне треугольника. Найдите отношение площади квадрата к площади треугольника.

26.31. Докажите, что существует бесконечно много треугольников, у которых периметр и площадь выражаются одним и тем же числом.

26.32. В треугольнике ABC биссектриса AD делит сторону BC в отношении $BD : DC = 2 : 1$. В каком отношении медиана CE делит эту биссектрису?

26.33. В треугольнике ABC проведены высоты AH и CP. Найдите угол B, если известно, что $AC = 2PH$.

26.34. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты CC_1 и AA_1. Известно, что $AC = 1$ см и $\angle C_1CA_1 = \alpha$. Найдите площадь круга, описанного около треугольника C_1BA_1.

26.35. Сторона треугольника равна 36 см. Прямая, параллельная данной стороне, делит площадь треугольника пополам. Найдите длину отрезка этой прямой, заключённого между сторонами треугольника.

26.36. На листе бумаги в клетку изображён треугольник ABC с вершинами в узлах сетки (рис. 26.2). С помощью линейки постройте точку пересечения медиан этого треугольника.

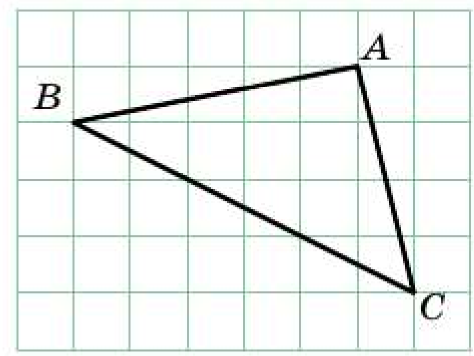


Рис. **26.2**

26.37. На стороне AC треугольника ABC отметили точку K так, что вписанные окружности треугольников ABK и BCK касаются. Докажите, что точка K принадлежит вписанной окружности треугольника ABC.

26.38. В треугольник вписана окружность радиуса 3. Найдите стороны треугольника, если известно, что одна из них разделена точкой касания на отрезки, равные 4 см и 3 см.

26.39. Прямоугольный треугольник ABC разделён высотой CD, проведённой к гипотенузе, на два треугольника: BCD и ACD. Радиусы окружностей, вписанных в эти треугольники, равны 4 см и 3 см соответственно. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

26.40. В прямоугольный треугольник, периметр которого равен 36 см, вписана окружность. Точка касания делит гипотенузу в отношении 2 : 3. Найдите стороны треугольника.

26.41. Прямая, проходящая через центр окружности, вписанной в треугольник, разбивает его на две части. Докажите, что площадь и периметр треугольника при этом делятся в одном и том же отношении.

26.42. Точка J принадлежит треугольнику ABC и $\angle BJC = 90^\circ + \dfrac{1}{2}\angle BAC$.

Известно, что прямая AJ содержит центр описанной окружности треугольника BJC. Докажите, что точка J — центр вписанной окружности треугольника ABC.

26.43. Биссектрисы углов A и B треугольника ABC пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках K и L соответственно. Отрезки AK и BL пересекаются в точке O так, что $\frac{AO}{OK} = \frac{BO}{OL}$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

26.44. В треугольнике ABC проведена биссектриса BK. На сторонах BA и BC отметили соответственно точки M и N такие, что $\angle AKM = \angle CKN = \frac{1}{2}\angle ABC$. Докажите, что прямая AC — касательная к окружности, описанной около треугольника MBN.

26.45. На стороне AC треугольника ABC отметили точку D такую, что $\angle ABD = \angle BCD$ и $AB = CD$. Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке E. Докажите, что $DE \parallel AB$.

26.46. Точка D — середина стороны AC треугольника ABC, DE и DF — биссектрисы соответственно треугольников ABD и CBD. Отрезки BD и EF пересекаются в точке M. Докажите, что $DM = \frac{1}{2}EF$.

26.47. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) отрезки CH, CL и CM — соответственно высота, биссектриса и медиана треугольника. Найдите отрезок CL, если $CH = 6$ см, $CM = 10$ см.

26.48. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD. Известно, что $AB = 15$ см, $BC = 10$ см. Докажите, что $BD < 12$ см.

26.49. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Пусть O, O_1 и O_2 — центры описанных окружностей треугольников ABC, ABD и ACD. Докажите, что $OO_1 = OO_2$.

26.50. В треугольнике ABC известно, что $\cos\angle BAC = \frac{1}{2}$, $AB = 2$ см, $AC = 3$ см. Точку D отметили на продолжении стороны AC так, что точка C находится между точками A и D, $CD = 3$ см. Найдите отношение радиуса окружности, описанной около треугольника ABC, к радиусу окружности, вписанной в треугольник ABD.

26.51. В треугольнике BCD известно, что $\cos\angle BCD = \frac{3}{4}$, $BC = 4$, $CD = 8$. Точка A лежит на стороне CD данного треугольника, причём $CA = 2$. Найдите отношение площади круга, описанного около треугольника BCD, к площади круга, вписанного в треугольник ABD.

26.52. В треугольнике ABC с периметром $2p$ сторона AC равна a, острый угол ABC равен α. Вписанная в треугольник ABC окружность с центром O касается стороны BC в точке K. Найдите площадь треугольника BOK.

26.53. Боковая сторона AB и меньшее основание BC трапеции $ABCD$ равны соответственно 16 см и 15 см. Какой из отрезков пересекает биссектриса угла BAD — основание BC или боковую сторону CD?

26.54. Биссектрисы углов при одном основании трапеции пересекаются на другом её основании. Докажите, что второе основание равно сумме боковых сторон.

26.55. Меньшая боковая сторона прямоугольной трапеции равна 3 см, а бóльшая образует угол $30°$ с одним из оснований. Найдите это основание, если на нём лежит точка пересечения биссектрис углов при другом основании.

26.56. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна S. Найдите площадь закрашенной фигуры (рис. 26.3).

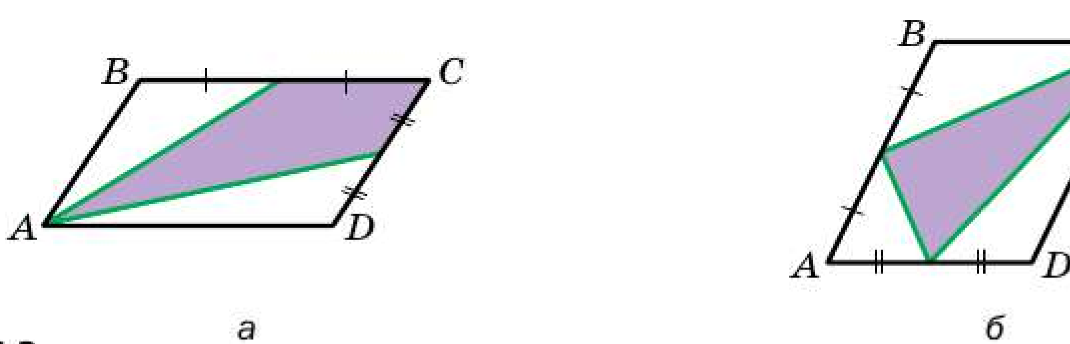


Рис. **26.3**

26.57. Диагонали равнобокой трапеции являются биссектрисами её острых углов и точкой пересечения делятся в отношении 5 : 13. Найдите площадь трапеции, если её высота равна 90 см.

26.58. Диагональ равнобокой трапеции перпендикулярна боковой стороне и образует с основанием трапеции угол $30°$. Найдите высоту трапеции, если радиус окружности, описанной около трапеции, равен R.

26.59. Постройте квадрат, площадь которого равна сумме площадей двух данных квадратов.

26.60. В четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $AB = AD$, $CB = CD$. Докажите, что $AD \perp BC$.

26.61. На основании AC равнобедренного треугольника ABC отметили точку M, а на боковых сторонах AB и BC соответственно точки K и N так, что $MK \parallel BC$, $MN \parallel AB$. Найдите боковую сторону, если известно, что периметр четырёхугольника $MKBN$ равен 30 см.

26.62. В прямоугольнике $ABCD$ известно, что $AB = 2AD$. Точка K — середина стороны AB. Найдите угол CKD.

26.63. Постройте квадрат по трём точкам, являющимся серединами трёх его сторон.

26.64. Диагонали равнобокой трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) пересекаются в точке M. Известно, что $\angle CMD = \angle BAD$. Докажите, что $BC = AB$.

26.65. В равнобокой трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) биссектрисы острых углов BAD и CDA пересекаются в точке, принадлежащей основанию BC. Найдите периметр трапеции, если $BC = 36$ см, $\angle BAD = 60°$.

26.66. Постройте параллелограмм по его вершине и серединам сторон, которым эта вершина не принадлежит.

26.67. Перпендикуляр, опущенный из вершины угла прямоугольника на его диагональ, делит эту диагональ на отрезки, длины которых относятся как 1 : 3. Найдите угол между диагоналями прямоугольника.

26.68. На стороне AD прямоугольника $ABCD$ отметили точку M так, что $MD = CD$, $MA = MC$. Найдите угол между диагоналями прямоугольника.

26.69. Высоты BN и DM ромба $ABCD$, проведённые из его тупых углов B и D, пересекаются в точке F. Найдите углы ромба, если $NF : FB = MF : FD = 1 : 2$.

26.70. Сумма длин катетов AB и BC прямоугольного треугольника ABC равна a. На гипотенузе AC во внешнюю сторону построен квадрат $ACMN$, диагонали которого пересекаются в точке O. Из точки O на прямые BA и BC опустили перпендикуляры OK и OF соответственно. Найдите периметр четырёхугольника $BKOF$.

26.71. Серединный перпендикуляр диагонали прямоугольника образует с его большей стороной угол 60°. Отрезок этого перпендикуляра, содержащийся внутри прямоугольника, равен 12 см. Найдите бóльшую сторону прямоугольника.

26.72. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает диагональ BD и сторону BC в точках E и F соответственно так, что $BE : ED = 2 : 7$. Найдите отношение $BF : FC$.

26.73. Биссектриса угла параллелограмма делит сторону параллелограмма на отрезки, равные a и b. Найдите стороны параллелограмма.

26.74. Биссектрисы углов A и C вписанного четырёхугольника $ABCD$ параллельны. Докажите, что сумма квадратов двух сторон четырёхугольника равна сумме квадратов двух других его сторон.

26.75. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Докажите, что сумма углов A и C больше 180°.

26.76. Площадь равнобокой трапеции равна $36\sqrt{2}$ см^2, а острый угол — $45°$. Найдите высоту трапеции, если в неё можно вписать окружность.

26.77. Центр окружности, вписанной в равнобокую трапецию, удалён от концов её боковой стороны на 12 см и 16 см. Найдите периметр трапеции.

26.78. Диагональ равнобокой трапеции делит высоту, проведённую из вершины тупого угла, на отрезки длиной 15 см и 12 см, а боковая сторона трапеции равна её меньшему основанию. Найдите площадь трапеции.

26.79. Бóльшая диагональ прямоугольной трапеции делит высоту, проведённую из вершины тупого угла, на отрезки длиной 15 см и 9 см. Бóльшая боковая сторона трапеции равна её меньшему основанию. Найдите площадь трапеции.

26.80. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Известно, что площади треугольников ABE и CDE равны между собой, диагональ AC является биссектрисой угла A, $AB = 4$ см. Найдите сторону BC.

26.81. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) точка M — середина стороны AB. Найдите площадь треугольника CMD, если площадь данной трапеции равна S.

26.82. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) $AC = 17$ см, $BD = 10$ см. Высота трапеции равна 8 см. Найдите площадь трапеции.

26.83. Диагонали трапеции с основаниями a и b перпендикулярны. Найдите наибольшее значение высоты трапеции.

26.84. Окружность, построенная на диагонали AC ромба $ABCD$ как на диаметре, проходит через середину стороны AB. Найдите углы ромба.

26.85. Постройте четырёхугольник по его сторонам и расстоянию между серединами диагоналей.

26.86. В трапеции длина одной из диагоналей равна сумме оснований, а угол между диагоналями равен $60°$. Докажите, что трапеция является равнобокой.

26.87. На сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) соответственно отметили точки K и L такие, что $\angle BAL = \angle CDK$. Докажите, что $\angle BLA = \angle CKD$.

26.88. В остроугольном треугольнике ABC отрезок AH — высота. Из точки H на стороны AB и AC опущены перпендикуляры HK и HL соответственно. Докажите, что четырёхугольник $BKLC$ вписанный.

26.89. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Известно, что $\angle BAC = \angle CBD$, $\angle BCA = \angle CDB$. Докажите, что $CO \cdot CA = BO \cdot BD$.

26.90. Трапеция $ABCD$ ($AB \parallel CD$) такова, что окружность, описанная около треугольника ABD, касается прямой BC. Докажите, что окружность, описанная около треугольника BCD, касается прямой AD.

26.91. Могут ли все вершины правильного семиугольника принадлежать сторонам правильного пятиугольника?

26.92. В окружности проведена хорда CD параллельно диаметру AB так, что в трапецию $ABCD$ можно вписать окружность. Найдите длину хорды CD, если $AB = 2R$.

26.93. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AD > BC$) на диагонали AC отметили точку E так, что $BE \parallel CD$. Докажите, что площади треугольников ABC и DEC равны.

26.94. Диагонали AC и BD равнобокой трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) пересекаются в точке O. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Докажите, что $\angle BOC > 60°$.

26.95. В описанном четырёхугольнике $ABCD$ стороны AD и BC параллельны. Докажите, что $AD + BC \geqslant 2\sqrt{S}$, где S — площадь четырёхугольника $ABCD$.

26.96. Луч MD принадлежит углу EMD. Точка O не принадлежит углу EMD. Точки A, B и C — основания перпендикуляров, опущенных из точки O на лучи ME, MD и MK соответственно. Докажите, что $OC \cdot AB = OA \cdot BC + OB \cdot AC$.

3. Окружность и её элементы

26.97. Через конец хорды, делящей окружность на две дуги, длины которых относятся как 3 : 5, проведена касательная. Найдите острый угол между хордой и касательной.

26.98. Прямая делит окружность на две дуги, длины которых относятся как 1 : 3. В каком отношении эта прямая делит площадь круга, ограниченного данной окружностью?

26.99. Окружность касается сторон прямого угла. Хорда, соединяющая точки касания, равна 2 см. Найдите расстояние от центра окружности до этой хорды.

26.100. Отрезок AB — диаметр окружности, прямая BC — касательная к этой окружности. Отрезок AC пересекает окружность в точке D так, что $AD = DC$. Найдите угол DAB.

26.101. Отрезок AB — общая хорда окружностей с центрами O_1 и O_2. Известно, что $\angle AO_1B = 120°$. Отношение длины окружности с центром O_1 к длине окружности с центром O_2 равно $\sqrt{3}$. Найдите угол AO_2B.

26.102. Точка C лежит на продолжении диаметра AB окружности. Прямая CD — касательная к окружности. Угол ADC равен 120°. Найдите градусную меру дуги BD.

26.103. В некоторый момент времени угол между часовой и минутной стрелками равен α. Через час он опять равен α. Найдите все возможные значения α.

26.104. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Через точку A первой окружности проведены прямые AP и AQ, пересекающие вторую окружность в точках B и C. Докажите, что касательная в точке A к первой окружности параллельна прямой BC.

26.105. В окружности радиуса R проведены хорда AC и диаметр AB. Угол BAC равен α. Найдите расстояние от точки C до диаметра AB.

26.106. Хорда CD, перпендикулярная диаметру AB окружности, делит его в отношении 1 : 3, считая от точки D. Найдите угол ADB.

26.107. Из конца A диаметра AC окружности опущен перпендикуляр AP на касательную, проведённую через лежащую на окружности точку B, отличную от A и C. Докажите, что луч AB — биссектриса угла PAC.

26.108. Прямая l касается окружности с диаметром AB в точке C. Точки M и N — проекции точек A и B на прямую l. Точка D — проекция точки C на диаметр AB. Докажите, что $CD^2 = AM \cdot BN$.

26.109. Окружность S_2 проходит через центр O окружности S_1 и пересекает её в точках A и B. Через точку A проведена касательная к окружности S_2. Точка D — вторая точка пересечения этой касательной с окружностью S_1. Докажите, что $AD = AB$.

26.110. Около данной окружности опишите треугольник с данными углами.

26.111. Две окружности радиусов R и r касаются внешним образом. Найдите длину отрезка общей касательной к этим окружностям, концами которого являются точки касания.

26.112. Две равных окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внутренним образом окружности с центром O_3 и касаются между собой. Периметр треугольника $O_1O_2O_3$ равен 18 см. Найдите радиус большей окружности.

26.113. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведены диаметры AC и AD этих окружностей. Найдите расстояние между центрами окружностей, если $BC = 10$ см, $BD = 6$ см.

26.114. Через точку A проведены касательные AB и AC к окружности с центром O (B и C — точки касания). Точка M такова, что $\angle AMO = 90°$. Докажите, что $\angle OMB = \angle OMC$.

26.115. Через точку A проведены к окружности касательная AB и прямая, пересекающая окружность в точках C и D. Найдите площадь треугольника CBD, если известно, что $AC : AB = 2 : 3$ и площадь треугольника ABC равна 20 см^2.

26.116. Отрезки AB и AC — хорды одной окружности. Точки M и N — середины дуг AB и AC. Докажите, что прямая MN отсекает на хордах AB и AC равные отрезки, считая от точки A.

26.117. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точке A. Через точку A проведена прямая, пересекающая S_1 в точке B, S_2 — в точке C. В точках C и B проведены касательные к окружностям, пересекающиеся в точке D. Докажите, что угол BDC не зависит от выбора прямой, проходящей через точку A.

26.118. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A к этим окружностям проведены касательные AM и AN (M и N — точки касания). Докажите, что:

1) $\angle ABN + \angle MAN = 180°$;

2) $\dfrac{BM}{BN} = \left(\dfrac{AM}{AN}\right)^2$.

26.119. На окружности даны точки A, B и C, причём расстояние от точки B до прямой l, касающейся окружности в точке A, больше расстояния от точки C до этой прямой. Прямая AC пересекает прямую, проведённую через точку B параллельно прямой l, в точке D. Докажите, что $AB^2 = AC \cdot AD$.

4. Декартовы координаты. Векторы

26.120. Вершинами треугольника являются точки A (–4; 1), B (–2; 4) и C (0; 1). Докажите, что треугольник ABC равнобедренный, и найдите его площадь.

26.121. Найдите координаты точки пересечения серединного перпендикуляра отрезка AB с осью абсцисс, если A (5; –3), B (4; 6).

26.122. Найдите координаты точки пересечения серединного перпендикуляра отрезка CD с осью ординат, если C (2; 1), D (4; –3).

26.123. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ с вершинами в точках A (–12; 6), B (0; 11), C (5; –1), D (–7; –6) является квадратом.

26.124. Точка M (5; –2) является одним из концов диаметра окружности, точка N (2; 0) — центр окружности. Найдите координаты второго конца диаметра.

26.125. Установите, лежат ли точки A (–4; –3), B (26; 7), C (2; –1) на одной прямой. В случае утвердительного ответа укажите, какая из точек лежит между двумя другими.

26.126. Докажите, что треугольник, вершинами которого являются точки A (5; 1), B (9; –2), C (7; 2), — прямоугольный, и составьте уравнение окружности, описанной около него.

26.127. Окружность, центр которой принадлежит оси ординат, проходит через точки A (1; 2) и B (3; 6). Принадлежит ли этой окружности точка C (–3; 4)?

26.128. Окружность с центром в точке M (–5; 3) касается оси ординат. Найдите координаты точек пересечения окружности с осью абсцисс.

26.129. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку P (–3; 5), угловой коэффициент которой равен 6.

26.130. Составьте уравнение прямой, которая проходит через точку S (–1; 4) и образует угол 135° с положительным направлением оси абсцисс.

26.131. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку A (–3; 1) параллельно прямой $5x + 3y = 6$.

26.132. Найдите уравнение геометрического места центров окружностей, проходящих через точки A (–3; –2) и B (2; 5).

26.133. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ отмечены точки M и K соответственно, причём $BM = \frac{1}{4}BC$, $CK = \frac{2}{3}CD$ (рис. 26.4). Выразите:

1) векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AK}$ через векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$;

2) векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ через векторы $\overrightarrow{AM} = \vec{m}$ и $\overrightarrow{AK} = \vec{n}$.

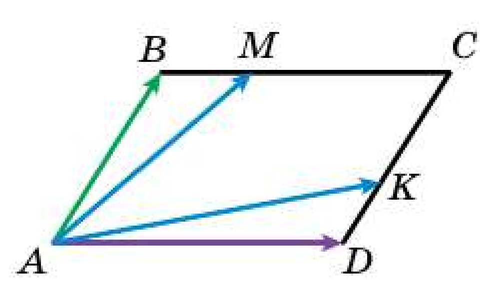


Рис. **26.4**

26.134. На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены такие точки D и E соответственно, что $AD : DC = 1 : 2$, $BE : EC = 2 : 1$. Выразите:

1) векторы $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{CD}$ через векторы $\overrightarrow{BE} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$;

2) векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$ через векторы $\overrightarrow{AE} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$.

26.135. Коллинеарны ли векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{KP}$, если M (4; –1), N (–6; 5), K (7; –2), P (2; 1)?

26.136. Найдите косинусы углов треугольника ABC, если $A\ (-3;\ -4)$, $B\ (2;\ -3)$, $C\ (3;\ 5)$. Установите вид треугольника.

26.137. Даны векторы $\vec{a}\,(2;\ -1)$ и $\vec{b}\,(1;\ -2)$. Найдите значение m, при котором векторы $\vec{a}+m\vec{b}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны.

26.138. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}=3\vec{m}+\vec{n}$ и $\vec{b}=\vec{m}-2\vec{n}$, если $|\vec{m}|=|\vec{n}|=1$ и $\vec{m}\perp\vec{n}$.

26.139. Даны векторы $\vec{a}\,(2;\ -4)$ и $\vec{b}\,(-1;\ 1)$. Найдите:

1) $|\vec{a}-\vec{b}|$; 2) $|2\vec{a}+\vec{b}|$.

26.140. Составьте уравнение прямой, которая касается окружности с центром $M\ (0;\ -4)$ в точке $A\ (5;\ -3)$.

26.141. Точки M_1, M_2, ..., M_6 — середины сторон выпуклого шестиугольника $A_1A_2...A_6$. Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны и параллельны отрезкам M_1M_2, M_3M_4, M_5M_6.

26.142. Две перпендикулярные хорды AB и CD окружности с центром O пересекаются в точке M. Докажите, что $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$.

26.143. Отрезки OA, OB, OC и OD являются радиусами окружности с центром в точке O. Докажите, что если $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$, то четырёхугольник $ABCD$ — прямоугольник.

26.144. Стороны треугольника KMN равны медианам треугольника ABC, а стороны треугольника PQR равны медианам треугольника KMN. Докажите, что треугольники PQR и ABC подобны, и найдите коэффициент подобия.

26.145. На прямой l последовательно отметили точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, ... так, что $A_1A_2=1$ см, $A_2A_3=2$ см, $A_3A_4=3$ см, $A_4A_5=4$ см, ... На отрезках A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, ... как на сторонах построены квадраты, расположенные в одной полуплоскости относительно прямой l. Докажите, что центры всех этих квадратов принадлежат одной параболе.

5. Геометрические преобразования

26.146. Даны точки $C\ (7;\ -4)$ и $D\ (-1;\ 8)$. При параллельном переносе образом середины отрезка CD является точка $P\ (-1;\ -3)$. Найдите координаты точек, являющихся образами точек C и D.

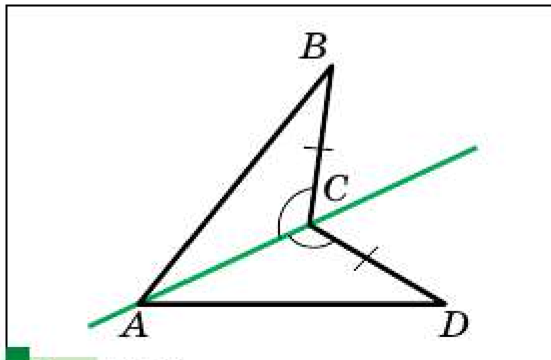


Рис. 26.5

26.147. На рисунке 26.5 $CB = CD$, $\angle ACB = \angle ACD$. Докажите, что точки B и D симметричны относительно прямой AC.

26.148. Запишите уравнение окружности, симметричной окружности $(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 11$ относительно:

1) начала координат; 2) точки M $(-3; 3)$.

26.149. На какой угол надо повернуть прямоугольник вокруг его центра симметрии, чтобы его образом был этот же прямоугольник?

26.150. Постройте треугольник, гомотетичный данному тупоугольному треугольнику, если центром гомотетии является центр окружности, описанной около треугольника, коэффициент гомотетии $k = -2$.

26.151. Образом точки A $(8; -2)$ при гомотетии с центром в начале координат является точка B $(4; -1)$. Найдите коэффициент гомотетии.

26.152. На стороне BC квадрата $ABCD$ отметили точку M так, что $BM : MC = 1 : 2$. Отрезки AM и BD пересекаются в точке P. Найдите площадь треугольника BPM, если площадь треугольника APD равна 27 см^2.

26.153. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M. Найдите площадь трапеции, если $AB : BM = 5 : 3$, $AD > BC$, а площадь треугольника AMD равна 32 см^2.

26.154. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC = 13$ см, $AC = 10$ см. К окружности, вписанной в этот треугольник, проведена касательная, параллельная основанию AC, которая пересекает стороны AB и BC в точках M и K соответственно. Вычислите площадь треугольника MBK.

26.155. На продолжениях медиан AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC отметили соответственно точки A_2, B_2 и C_2 так, что $A_1A_2 = \frac{1}{2}AA_1$, $B_1B_2 = \frac{1}{2}BB_1$, $C_1C_2 = \frac{1}{2}CC_1$ (рис. 26.6). Найдите площадь треугольника $A_2B_2C_2$, если площадь треугольника ABC равна 1.

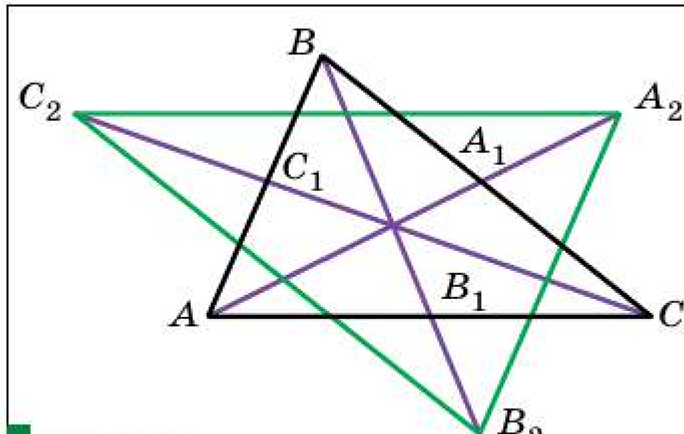


Рис. 26.6

26.156. Точки A и B принадлежат прямой m, а точки C и D этой прямой не принадлежат. Через точки C и D проведите параллельные прямые, пересекающие прямую m соответственно в точках M и K так, что $AM = BK$.

26.157. На стороне AB квадрата $ABCD$ построили равносторонний треугольник AKB (точка K не принадлежит квадрату). Найдите радиус окружности, описанной около треугольника CKD, если $AB = 1$ см.

26.158. Постройте прямоугольный треугольник ABC ($C = 90°$) по вершинам A, C и точке K, принадлежащей биссектрисе угла B.

26.159. В четырёхугольнике $ABCD$ $\angle B = \angle D = 90°$, $AD = DC$, $BD = 1$ см (рис. 26.7). Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$.

26.160. Фигура на плоскости ограничена четырёхзвенной ломаной $ABCDE$, у которой все звенья равны, а углы между соседними звеньями прямые (A, B, C, D — вершины квадрата, D — середина отрезка AE), и дугой AE окружности с центром в точке C и радиусом CA (рис. 26.8). Разрежьте эту фигуру на две равные фигуры.

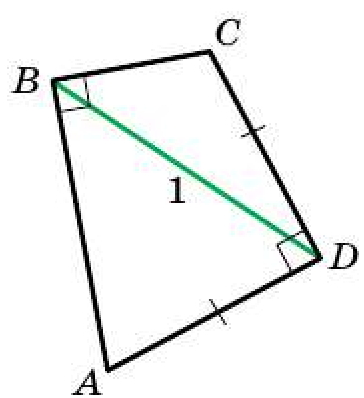


Рис. 26.7

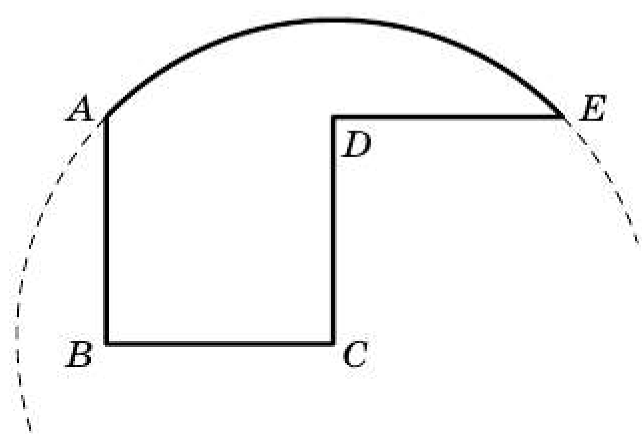


Рис. 26.8

26.161. Через точку A, лежащую внутри данной окружности, проведите хорду так, чтобы точка A разделила её в данном отношении.

Дружим с компьютером

Вы продолжите совершенствовать свои навыки пользования компьютером, приобретённые в 7 и 8 классах, осваивать новые инструменты и новые программные средства. Напомним, что кроме заданий, приведённых в этом разделе, вы можете использовать разнообразные программы, созданные для освоения школьного курса геометрии. Для их поиска, а также поиска нужной вам информации вы можете использовать глобальную сеть Интернет.

В учебнике приведены краткие исторические сведения о знаменитых учёных, труды которых связаны с изучаемыми темами. С помощью глобальной сети Интернет вы можете получить больше информации об их биографиях и научных открытиях.

Если вы планируете выбрать профессию, которая требует углублённого знания математики, то можно начать осваивать математические пакеты (например, Mathcad, MATLAB и т. п.), содержащие мощный инструментарий для математических вычислений, геометрических построений и т. п. Для будущего инженера полезными будут знание инженерной графики и умение строить сложные чертежи (например, AutoCad). Вы можете изучать эти программные средства, выполняя задания к курсу геометрии.

Значительная часть курса геометрии 9 класса посвящена декартовым координатам на плоскости, уравнениям некоторых фигур. В зависимости от возможностей языка программирования, который вы изучаете на уроках информатики или самостоятельно, рекомендуем написать программы для изображения на экране компьютера точек с заданными координатами; прямых и окружностей с заданными уравнениями и т. п. Ниже приведены простейшие задания; используя их в качестве идей, вы можете самостоятельно придумывать новые задания и создавать программы для их выполнения.

Задания курса геометрии 9 класса для выполнения с помощью компьютера

В этом разделе приведены задания, которые вы сможете выполнять с помощью компьютера по мере изучения соответствующих тем. Основными направлениями являются задания на построение геометрических фигур, которые вы будете выполнять с помощью графического редактора, и вычисления, которые вы можете выполнять с помощью калькулятора либо математических пакетов.

Кроме этих заданий, вы можете выполнять задания из рубрики «Практические задания» не только в тетради, но и с помощью компьютерных программ.

Тригонометрические функции угла от 0° до 180°

1. Научитесь вычислять тригонометрические функции угла, а также находить величину угла по значениям его тригонометрических функций с помощью калькулятора.

Теорема косинусов

2. С помощью графического редактора проиллюстрируйте следствие из теоремы косинусов следующим образом.

Выберите набор положительных чисел, удовлетворяющих условию $a^2 < b^2 + c^2$, где a — наибольшее число из выбранных. Постройте набор отрезков с заданными длинами a, b, c. Составьте из этих отрезков треугольник. Получился ли он остроугольным? Проделайте эти же действия для условий $a^2 > b^2 + c^2$ и $a^2 = b^2 + c^2$. Числа a, b, c должны удовлетворять условию $a < b + c$.

Теорема синусов

3. С помощью средств графического редактора изобразите произвольный треугольник, измерьте его стороны и углы. Проверьте, выполняется ли теорема синусов. Вычисления проводите также с помощью компьютера.

Решение треугольников.
Формулы для нахождения площади треугольника

4. Задания § 4, 5, требующие нахождения значений тригонометрических функций и проведения большого объёма вычислений, выполняйте с помощью компьютера.

Правильные многоугольники и их свойства

5. Придумайте, как строить правильные многоугольники. Рассмотрите два способа: 1) используйте теорему 6.2 и формулу для вычисления величины центрального угла вписанного многоугольника; 2) используйте информацию о величине угла правильного многоугольника и длине его стороны.

6. Постройте несколько правильных многоугольников с заданным количеством вершин.

Длина окружности. Площадь круга

7. Вычислите несколько раз длину окружности и площадь круга, используя приближения числа π с различной точностью.

8. Есть ли в калькуляторе или математическом пакете, которым вы пользуетесь, средства для использования стандартного значения числа π?

Расстояние между двумя точками с заданными координатами. Деление отрезка в данном отношении

9. Большинство графических редакторов представляют поле для рисования в виде координатной плоскости. Исследуйте, каким образом задаются координаты точек на этой плоскости. Продумайте, как вы можете использовать этот инструментарий для выполнения построений.

Уравнение фигуры

10. Если вы изучаете математические пакеты, то можете с их помощью построить несколько произвольных фигур с заданными уравнениями.

11. Изучая программирование на уроках информатики, вы можете создать свои средства для рисования фигур по заданному уравнению.

Общее уравнение прямой

12. Напишите программу, которая по заданным значениям величин a, b, c делает вывод, какая фигура является графиком уравнения $ax + by = c$, выводит сообщение об этом и изображает этот график на экране компьютера.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

13. Какие средства графического редактора можно использовать, чтобы построить прямую с заданным угловым коэффициентом?

14. Напишите программу, которая по уравнению прямой в виде $y = kx + b$ строит её изображение на экране компьютера.

Понятие вектора

15. Изобразите с помощью графического редактора несколько векторов. Какой тип линии удобно выбрать для изображения вектора? Какой инструмент вы используете для построения коллинеарных векторов; сонаправленных векторов? противоположно направленных векторов? Определите модули построенных векторов. Как это можно сделать проще всего?

Координаты вектора

16. Изобразите на экране компьютера декартову систему координат, выберите удобный единичный отрезок. Задайте координаты вектора и координаты некоторой точки. Отложите от этой точки вектор с заданными координатами. Как проще всего это сделать?

Сложение и вычитание векторов

17. Нарисуйте несколько произвольных векторов. С помощью какого инструмента проще всего находить сумму и разность этих векторов?

Умножение вектора на число. Применение векторов к решению задач

18. Нарисуйте произвольный вектор и задайте несколько произвольных чисел (натуральных, целых, дробных). Умножьте построенный вами вектор на эти числа. С помощью какого инструмента проще всего построить вектор, являющийся произведением вектора на число?

Скалярное произведение векторов

19. Постройте на координатной плоскости два произвольных вектора. Найдите величину угла между ними с помощью следствия из теоремы 17.2. Проверьте полученный результат, определив угол между этими векторами с помощью средств графического редактора.

Движение. Параллельный перенос

20. Определите, какие средства графического редактора позволяют выполнять перемещение фигуры. Какие способы перемещения, кроме параллельного переноса, можно реализовать?

Осевая симметрия. Центральная симметрия. Поворот

21. Найдите средства графического редактора, с помощью которых можно построить: 1) фигуру, симметричную данной фигуре относительно данной прямой; 2) фигуру, симметричную данной фигуре относительно данной точки; 3) фигуру, являющуюся результатом поворота данной фигуры вокруг данной точки.

Гомотетия. Подобие фигур

22. Найдите средства графического редактора, с помощью которых можно построить фигуру, подобную данной произвольной фигуре. Какие средства надо использовать, чтобы эти фигуры были подобны с заданным коэффициентом?

Прямая призма. Пирамида

23. Постройте в графическом редакторе изображения прямой и наклонной призмы, изображения различных пирамид. Обратите внимание на выбор типа линии для изображения невидимых линий.

Цилиндр. Конус. Шар

24. Постройте в графическом редакторе несколько изображений цилиндра, изменяя угол между образующей цилиндра и направлением взгляда зрителя: взгляд параллелен образующей, перпендикулярен образующей, составляет с образующей острый угол. Выполните это же задание для конуса и для шара.

Проектная работа

Эта рубрика адресована прежде всего тем, кто хочет научиться приобретать знания самостоятельно, творчески мыслить, формировать, выражать и отстаивать свою точку зрения, выдвигать гипотезы, находить наиболее рациональные и нестандартные решения.

Первым шагом, который может помочь в реализации этих целей, является участие в проектной работе.

Проект — это самостоятельное исследование по выбранной теме, которое можно выполнять как индивидуально, так и группой учащихся.

Дадим несколько советов по организации работы над проектом и оформлению результатов исследования.

1. При выборе темы необходимо учитывать её актуальность, наличие источников информации в литературе и интернет-ресурсов. Здесь важно ваше желание проявить себя в качестве исследователя в работе именно над выбранной темой.

2. Работу начинают с составления предварительного плана, в котором отражается замысел и этапы реализации задуманного. После знакомства с основными источниками информации с помощью руководителя проекта составляют окончательный план.

3. Важно чётко сформулировать цели исследования. Они могут быть записаны в такой форме: изучить, описать, проанализировать, доказать, сравнить и т. п.

4. Работу завершают подведением итогов исследования, делают выводы, намечают перспективы дальнейшего изучения темы.

5. Примерный объём работы — 10—15 страниц. Дополнительно может прилагаться иллюстративный материал.

6. Работа может быть оформлена в виде реферата, доклада, компьютерной презентации.

Ниже приводится рекомендуемый список тем, которые могут быть выбраны для проектной работы.

1. Выдающиеся геометры России

Рекомендуемая литература

1. *Белл Э. Т.* Творцы математики. — М.: Просвещение, 1979.
2. *Гнеденко Б. В.* Очерки по истории математики в России. — М.: КомКнига, 2005.
3. *Энциклопедия для детей*. Математика. — М.: Аванта +, 2003. Т. 11.

2. Геометрия орнаментов и узоров

Рекомендуемая литература

1. *Александров С.* Измельчающиеся узоры // Квант. — 1980. — № 1.

2. *Земляков А.* Орнаменты // Квант. — 1977. — № 3.
3. *Корепин В.* Узоры Пенроуза и квазикристаллы // Квант. — 1987. — № 6.

3. Геометрия и астрономия

Рекомендуемая литература

1. *Карпушина Н. М.* Математика и астрономия // Математика для школьников. — 2005. — № 1.
2. Мир математики: в 45 т. Т. 30: Роза Мария Рос. Музыка сфер. Астрономия и математика. — М.: Де Агостини, 2014.
3. Мир математики: в 45 т. Т. 38: Иоланда Гевара, Карлес Пюнг. Измерение мира. Календари, меры длины и математика. — М.: Де Агостини, 2014.
4. *Перельман Я. И.* Занимательная геометрия на вольном воздухе и дома. — М.: Центрполиграф, 2015.
5. *Протасов В. Ю.* Геометрия звёздного неба // Квант. — 2010. — № 2.
6. *Рожанский И. Д.* Анаксагор. — М.: Мысль, 1983.

4. Золотое сечение

Рекомендуемая литература

1. *Васютинский Н. А.* Золотая пропорция. — Санкт-Петербург: Диля, 2006.
2. *Ливио М.* Число Бога. Золотое сечение — формула мироздания. — М.: АСТ, 2015.
3. *Мерзляк А. Г. и др.* Математика: 6 класс. — М.: Вентана-Граф, 2015.
4. Мир математики: в 40 т. Т. 1: Фернандо Корбалан. Золотое сечение. Математический язык красоты. — М.: Де Агостини, 2014.
5. *Тимердинг Г. Е.* Золотое сечение. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009.
6. *Шмелёв И. и др.* Золотое сечение. Три взгляда на природу гармонии. — М.: Стройиздат, 1990.

5. Паркеты из правильных многоугольников

Рекомендуемая литература

1. *Болтянский В.* Паркет из четырёхугольников // Квант. — 1989. — № 11.
2. *Колмогоров А.* Паркеты из правильных многоугольников // Квант. — 1986. — № 8.
3. *Михайлов О.* Одиннадцать правильных паркетов // Квант. — 1979. — № 2.

6. Кривые второго поядка

Рекомендуемая литература

1. *Бронштейн И.* Гипербола. Парабола. Эллипс // Квант. — 1975. — № 1, 3, 4.

2. *Бронштейн И.* Общие свойства конических сечений // Квант. — 1975. — № 5.
3. *Жаутыков О.* Кривые второго порядка // Квант. — 1977. — № 8.
4. *Маркушевич А. И.* Замечательные кривые. — М.: Наука, 1978.
5. *Энциклопедия для детей.* Математика. — М.: Аванта+, 2003. Т. 11.

7. Метод координат

Рекомендуемая литература

1. *Болибрух А., Уроев В., Шабунин М.* Задачи на координатной плоскости // Квант. — 1986. — № 11.
2. *Габович И. Г.* Алгоритмический подход к решению математических задач. — М.: Просвещение, 1996.
3. *Гельфанд И. М., Глаголева Е. Г., Кириллов А. А.* Метод координат // Библиотечка физико-математической школы. Математика. — М.: Наука, 1973. — Вып. 1.
4. *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии. — М.: МЦНМО, 2006.

8. Векторный метод в геометрии

Рекомендуемая литература

1. *Болтянский В.* Три точки на одной прямой // Квант. — 1978. — № 10.
2. *Габович И. Г.* Алгоритмический подход к решению математических задач. — М.: Просвещение, 1996.
3. *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии. — М.: МЦНМО, 2006.

9. Теоремы о конкурентных прямых и коллинеарных точках

Рекомендуемая литература

1. *Заславский А.* Некоторые факты проективной геометрии // Квант. — 1986. — № 1.
2. *Коксетер Г. С., Грейтцер С. П.* Новые встречи с геометрией. — М.: Наука, 1978.
3. *Куланин Е.* Об одной трудной геометрической задаче // Квант. — 1992. — № 7.
4. *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии. — М.: МЦНМО, 2006.
5. *Савин А.* Проективная плоскость // Квант. — 1974. — № 3.
6. *Шарыгин И. Ф.* Геометрия. Планиметрия. — М.: Дрофа, 2001.

10. Кривые постоянной ширины

Рекомендуемая литература

1. *Болтянский В. Г., Яглом И. М.* Выпуклые фигуры. — М.: Гостехиздат, 1951.
2. *Коган Б.* Удивительные катки // Квант. — 2001. — № 5.
3. *Радемахер Г., Тёплиц О.* Числа и фигуры. — М.: Физматгиз, 1962.

11. Применение геометрических преобразований в задачах на построение

Рекомендуемая литература

1. *Александрова И. И.* Сборник геометрических задач на построение. — М.: Учпедгиз, 1950.
2. *Блинков А. Д., Блинков Ю. А.* Геометрические задачи на построение. — М.: МЦНМО, 2010.
3. *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии. — М.: МЦНМО, 2006.
4. *Шарыгин И. Ф.* Задачи по геометрии. Планиметрия. — М.: Наука, 1982.

12. Геометрия масс

Рекомендуемая литература

1. *Балк М. Б.* Геометрические приложения понятия о центре тяжести. — М.: Гостехиздат, 1959.
2. *Балк Б. М., Болтянский В. Г.* Геометрия масс // Библиотечка Квант. — М.: Наука, 1987. — Вып. 61.
3. *Мякишев А. Г.* Элементы геометрии треугольника. — М.: МЦНМО, 1992.

13. Преобразования плоскости

Рекомендуемая литература

1. *Моденов П. С., Пархоменко А. С.* Геометрические преобразования. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1961.
2. *Понарин Я. П.* Элементарная геометрия. — Т. 1: Планиметрия, преобразования плоскости. — М.: Изд-во МЦНМО, 2015.
3. *Расин В. В.* Лекции по геометрии: Аксиомы планиметрии. Преобразования плоскости. — Екатеринбург: Издательство Урал. ун-та, 2011.
4. *Саранцев Г. И.* Сборник задач на геометрические преобразования: Подобия плоскости в задачах. — М.: Просвещение, 1981.
5. *Яглом И. М.* Геометрические преобразования: в 2 т. — М.: Гостехиздат, 1955—1956. (Б-ка математического кружка).

14. Инверсия и её применение

Рекомендуемая литература

1. *Бакельман И. Я.* Инверсия. — М.: Наука, 1966. — 79 с. — (Популярные лекции по математике. Вып. 44); электронная версия http://ilib.mccme.ru/plm/
2. *Жижилкин И. Д.* Инверсия. — М.: Изд-во МЦНМО, 2009. — (Библиотека «Математическое просвещение», вып. 35).
3. *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика: Элементарный очерк идей и методов / пер. с англ. / под ред. А. Н. Колмогорова. — 7-е изд., стереотип. — М.: Изд-во МЦНМО, 2015.

4. *Понарин Я. П.* Элементарная геометрия: В 2 т. — Т. 1: Планиметрия, преобразования плоскости. — М.: МЦНМО, 2014.
5. *Уроев В.* Инверсия // Квант, 1984. — № 5.

15. Что такое длина кривой и площадь фигуры?

Рекомендуемая литература

1. *Бончковский Р. Н.* Площади и объёмы. — М.: Вузовская книга, 2014. — (Библиотека «Вузовской книги» — Научно-популярная серия).
2. *Гейдман Б. П.* Площади многоугольников. — 3-е изд., стереотип. — М.: Изд-во МЦНМО, 2010. — (Библиотека «Математическое просвещение», вып. 9).
3. *Дубнов Я. С.* Измерение отрезков. / под ред. и с доп. И. М. Яглома. — М.: Физматгиз, 1962. — (Математическая б-чка).
4. *Мерзон Г. А., Ященко И. В.* Длина. Площадь. Объём. — Изд. 4-е, стереотип. — М.: Изд-во МЦНМО, 2016. — (Школьные математические кружки).
5. *Перельман Я. И.* Занимательная геометрия. — М.: ТЕРРА: Книжный Клуб Книговек, 2016.

Ответы и указания к упражнениям

Глава 1. 1.12. 2) $\frac{\sqrt{13}}{4}$ или $-\frac{\sqrt{13}}{4}$; 3) 0,6; 4) $-\frac{4}{3}$; 5) $\frac{12}{5}$. **1.13.** 1) $-\frac{12}{13}$; 2) $\frac{\sqrt{35}}{6}$; 3) $\frac{5}{12}$; 4) $-\frac{8}{15}$. **1.16.** 1) $2-\sqrt{3}$; 2) $-2{,}5$; 3) $-\sqrt{3}-2$; 4) $\frac{5}{4}$. **1.17.** 1) 1; 2) $\frac{3}{2}$; 3) $\frac{2}{3}$. **1.24.** $-\frac{1}{2}$. **1.25.** 120°. **1.26.** В остроугольном: $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, в тупоугольном: $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **1.27.** 45°. **1.28.** 120°. **1.29.** 60° или 120°. **1.30.** 15°, или 75°, или 105°, или 165°. **1.31.** 1. **1.32.** 1. **2.3.** 120°. **2.4.** 45°. **2.11.** $2\sqrt{7}$ см. **2.12.** $\sqrt{10}$ см. **2.13.** 13 см. **2.14.** $a\sqrt{2+\sqrt{2}}$. **2.15.** $3\sqrt{89}$ см. **2.16.** $\sqrt{a^2+b^2+ab\sqrt{2}}$. **2.17.** $\sqrt{a^2+b^2-ab}$. **2.18.** 15 см, 24 см. **2.19.** 2 см, $4\sqrt{3}$ см. **2.20.** 3 см, 5 см. **2.21.** 10 см, 6 см, 14 см. **2.22.** 6 см или 10 см. **2.23.** 75 см. **2.27.** 14 см. **2.28.** 34 см. **2.29.** 7 см, 9 см. **2.30.** 20 см, 30 см. **2.31.** 11 см. **2.32.** 22 см. **2.33.** $\sqrt{21}$ см или $\sqrt{29}$ см. **2.34.** 13 см. **2.35.** $\sqrt{79}$ см. **2.37.** $\sqrt{\frac{247}{7}}$ см. **2.38.** Нет. **2.41.** 6 см. **2.44.** *Указание*. Воспользовавшись ключевой задачей 1 § 2, докажите, что $\frac{4}{9}m_a^2+\frac{4}{9}m_b^2=c^2$. **2.46.** *Указание*. Пусть AB — диаметр одной окружности, точка X — точка другой окружности. Если точка X не принадлежит прямой AB, то рассмотрите параллелограмм, стороны которого — отрезки XA и XB. **2.47.** *Указание*. Середины сторон четырёхугольника являются вершинами параллелограмма. **2.48.** $\sqrt{m^2+n^2+mn}$, $\sqrt{m^2+n^2-mn}$. **2.49.** $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+ab\sqrt{2}}$, $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-ab\sqrt{2}}$. **2.50.** 5 см. *Указание*. Докажите, что в данной трапеции середины диагоналей и оснований являются вершинами прямоугольника. **2.51.** 8 см. *Указание*. Проведите через вершину B прямую, параллельную стороне CD, и рассмотрите образовавшийся при этом треугольник. **2.52.** $\frac{13}{20}$. **2.53.** 120°. *Указание*. Через вершину C проведите прямую, параллельную диагонали BD. **2.54.** $\sqrt{a^2+c^2+ac}$ или $\sqrt{a^2+c^2-ac}$. *Указание*. Воспользуйтесь тем, что $\triangle C_1BA_1 \sim \triangle ABC$ с коэффициентом подобия, равным $|\cos B|$. **2.55.** 25 см. *Указание*. Используя свойство биссектрисы треугольника, покажите, что $DC : CE = 5 : 1$. Примените теорему косинусов к треугольнику ABE. **2.56.** *Указание*. Докажите, что косинус угла между диагоналями четырёхугольника равен 0. **2.57.** *Указание.* Пусть диагонали параллелограмма равны d_1 и d_2. Имеем: $b^2 = \frac{d_1^2}{4} + \frac{d_2^2}{4} - \frac{d_1 d_2}{2}\cos\alpha$, $a^2 = \frac{d_1^2}{4} + \frac{d_2^2}{4} + \frac{d_1 d_2}{2}\cos\alpha$. Отсюда $\cos\alpha = \frac{a^2 - b^2}{d_1 d_2}$. Воспользуйтесь тем, что $d_1 d_2 \leqslant \frac{d_1^2 + d_2^2}{2}$. **2.58.** *Указание.* На данном диаметре выберите точку M_1 такую, что $OM_1 = OM$. Пусть хорда CD параллельна диаметру. Тогда $CM^2 + DM^2 = DM^2 + DM_1^2$. **2.59.** *Указание.* Пусть X — произвольная точка данного четырёхугольника $ABCD$. Тогда один из углов AXB, BXC, CXD, DXA является не острым. Пусть, например, $\angle AXB \geqslant 90°$. Предположив, что $XA \geqslant 5$ и $XB \geqslant 5$, покажите, что $AB > 7$. **2.61.** $\sqrt{2}$. *Указание.* Очевидно, что при $x \leqslant 0$ наименьшее значение не может быть достигнуто. При $x > 0$ рассмотрите треугольник AOB, у которого $\angle O = 90°$, $OA = OB = 1$. Постройте луч OC так, что $\angle AOC = 60°$, $\angle BOC = 30°$. Пусть M — произвольная точка луча OC, отличная от точки O. Обозначим $OM = x$. Воспользуйтесь тем, что $MA + MB \geqslant AB$. **2.63.** *Указание.* Рассмотрите отрезки OA, OB и OC такие, что $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $\angle AOB = 60°$, $\angle BOC = 60°$. **2.64.** Существуют. *Указание.* Выберите точки A, B и C на одной прямой так, чтобы $AB = \sqrt{2} - 1$, $AC = CB$. **3.9.** $2\sqrt{6}$ см. **3.10.** 6 см. **3.11.** $\frac{a\sin\beta}{\cos(\beta+\gamma)\sin\gamma}$. **3.12.** $\frac{m\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$. **3.13.** $\frac{c\sin\alpha\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\gamma\sin\varphi}$. **3.14.** $\frac{m\sin\alpha\sin\varphi}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}$. **3.18.** *Указание.* Докажите, что $\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} B$. **3.19.** 9 см. **3.20.** $\frac{25}{3}$ см. **3.21.** 60° или 120°. **3.22.** $\frac{b\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}}$. **3.23.** $\frac{a\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(45° + \frac{3\alpha}{4}\right)}$. **3.24.** $\frac{a\sin\alpha}{\sin\beta}$. *Указание.* Докажите, что $CE = DE$. **3.25.** $\frac{2m\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, $\frac{2m\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. *Указание.* На продолжении медианы AM за точку M отметьте точку K такую, что $AM = MK$, и примените теорему синусов к треугольнику ACK. **3.26.** $\frac{a\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha}$. **3.27.** $R\operatorname{tg}\alpha$. **3.28.** *Указание.* Выразите углы AHB, BHC и AHC через углы треугольника ABC. **3.29.** $\frac{25}{4}$ см. *Указание.* Воспользовавшись свойством биссектрисы треугольника, найдите косинус угла при основании равнобедренного треугольника. **3.32.** $2\sqrt{\frac{34}{15}}$ см.

Указание. Применив теорему косинусов к треугольникам MNP и MQP, найдите косинус угла PMQ. **3.33.** $\frac{14\sqrt{3}}{3}$. *Указание.* Если точки M_1 и M_2 — основания перпендикуляров, то около четырёхугольника MM_1AM_2 можно описать окружность. **3.34.** Окружность радиуса $\frac{a}{\sin\alpha}$ с центром в точке пересечения данных прямых. **3.36.** AM — это диаметр. *Указание.* Точки A, N, M, K лежат на одной окружности. **3.37.** 6 см. *Указание.* Покажите, что $\angle BOC = 150°$. Докажите, что отрезок OM является диаметром описанной окружности треугольника BOC. **3.38.** 6 см или $2\sqrt{3}$ см. *Указание.* Воспользуйтесь тем, что $DC = DJ = DB$. **3.39.** *Указание.* Докажите, что $\sin\angle ACD = \sin\angle ACB$. **3.40.** *Указание.* $AE = 2O_1A \sin 45°$, $AE = 2O_2A \sin 45°$. Отсюда $AO_1 = AO_2$. **3.41.** $\frac{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}}{2\sin\alpha}$. *Указание.* Отметьте на окружности такую точку M, что $\smile DM = \smile DC + \smile AB$ (см. рисунок). Тогда $CM = a$, $\angle DCM = 180° - \alpha$. **3.42.** *Указание.* $\frac{BM}{\sin\angle BCM} = \frac{CM}{\sin\angle CBM} = \frac{DN}{\sin\angle DCN} = \frac{CN}{\sin\angle CDN}$. Далее воспользуйтесь тем, что $\sin\angle CBM = \sin\angle ABC = \sin\angle ADC = \sin\angle CDN$. **4.12.** 107°, 73°, 132°, 48°. *Указание.* Проведите через один из концов меньшего основания прямую, параллельную боковой стороне трапеции, и рассмотрите образовавшийся при этом треугольник. **5.2.** 1) 60° или 120°; 2) 90°. **5.3.** 30° или 150°. **5.6.** 12 см. **5.7.** 24 см. **5.8.** 1) $\frac{3}{2}$ см, $\frac{25}{8}$ см; 2) 8 см, $\frac{145}{8}$ см. **5.9.** 2 см, $\frac{145}{8}$ см. **5.14.** $\frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin(\beta+\gamma)}$. **5.15.** $\frac{b^2\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\beta}$. **5.16.** $\frac{h_1h_2}{2\sin\alpha}$. **5.17.** $\frac{h^2\sin\beta}{2\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}$. **5.18.** 51 см^2, 75 см^2, 84 см^2. **5.19.** $\frac{24}{7}$ см. *Указание.* Воспользуйтесь тем, что $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD}$. **5.20.** 360 см^2. *Указание.* Проведите через один из концов меньшего основания трапеции прямую, параллельную боковой стороне трапеции, и найдите высоту треугольника, который эта прямая отсекает от трапеции. **5.21.** $12\sqrt{5}$ см^2. *Указание.* Пусть $ABCD$ — данная трапеция, $BC \parallel AD$. Проведите через вершину C прямую, которая параллельна прямой BD и пересекает прямую AD в точке E. Докажите, что треугольник ACE и данная трапеция равновелики.

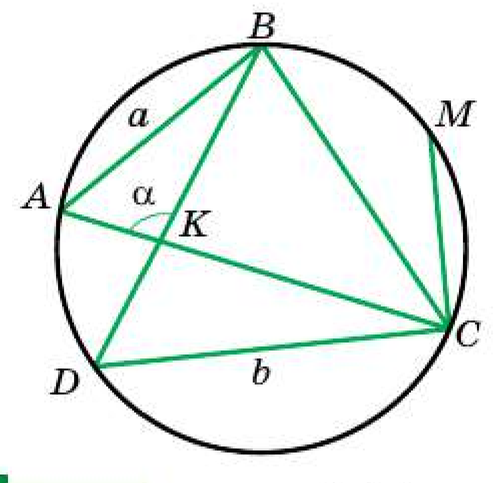


Рисунок к задаче 3.41

5.22. 19,5 см. **5.23.** 13 см, 14 см, 15 см. **5.24.** 36 см^2. **5.26.** 13 см, 15 см. *Указание*. Пусть точки касания вписанной окружности делят одну из неизвестных сторон на отрезки 6 см и x см, а другую — на отрезки 8 см и x см. Выразите площадь треугольника двумя способами: с помощью формулы Герона и через радиус вписанной окружности. **5.26.** *Указание*. Воспользуйтесь формулой для нахождения радиуса вневписанной окружности и формулой Герона. **5.27.** *Указание*. Выразите высоты через площадь треугольника и соответствующие стороны. **5.30.** *Указание*. Пусть отрезок AK — биссектриса треугольника ABC. Имеем $S_{ABC} = S_{BAK} + S_{KAC}$. Далее воспользуйтесь теоремой 5.1 и ключевой задачей 2 § 5. **5.31.** 120°. *Указание*. Воспользуйтесь ключевой задачей 5.30. **5.32.** 1 см, 2 см, $\sqrt{3}$ см. *Указание*. Воспользуйтесь ключевой задачей 5.30 и теоремой косинусов. **5.33.** 235,2 см^2. *Указание*. Воспользовавшись ключевой задачей 5.30, найдите косинус угла между биссектрисой и стороной треугольника. **5.34.** *Указание*. Воспользуйтесь ключевой задачей 5.10. **5.35.** *Указание*. Воспользуйтесь ключевой задачей 5.10. **5.36.** *Указание*. Докажите, что $R + r = \frac{a+b}{2}$, где a и b — катеты. **5.37.** *Указание*. Наименьший угол треугольника не превышает 60°. **5.38.** *Указание*. $\frac{(a+c)(b+d)}{4} = \frac{ab}{4} + \frac{ad}{4} + \frac{cb}{4} + \frac{cd}{4} \geqslant \frac{1}{2}(S_{ABC} + S_{BAD} + S_{BCD} + S_{CDA})$. **5.39.** *Указание*. Воспользовавшись результатом задачи 5.38, можно записать $S \leqslant \frac{(a+c)(b+d)}{4} \leqslant \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{(a+c)+(b+d)}{2}\right)^2 = 1$.

5.40. *Указание*. Около каждого из четырёхугольников OM_1CM_2, OM_1BM_3, OM_2AM_3 можно описать окружность. К этим четырёхугольникам примените теорему Птолемея. **5.41.** $24\sqrt{3}$. *Указание*. Постройте отрезки OA, OB и OC так, что $\angle BOC = 90°$, $\angle COA = 120°$, $\angle BOA = 150°$ (см. рисунок). Пусть $OA = x$, $OC = z$, $OB = \frac{y}{\sqrt{3}}$. Покажите, что $xy + 2yz + 3zx = 4\sqrt{3}S_{ABC}$.

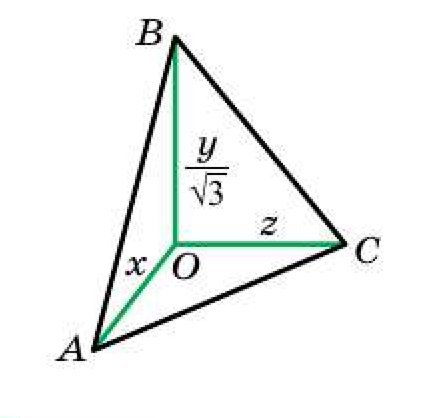


Рисунок к задаче 5.41

Глава 2. **6.10.** $\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$. **6.11.** $2\sqrt{R^2 - r^2}$. **6.12.** $\sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4}}$. **6.15.** 5 сторон. **6.16.** 18 сторон. **6.19.** $\sqrt{3}$: 2. **6.22.** $2R^2\sqrt{2}$. **6.23.** $a\sqrt{3}$, $2a$, $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. **6.24.** $6(\sqrt{2}-1)$ см. **6.25.** 8 см. **6.26.** $a\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $a(\sqrt{2}+1)$, $a\sqrt{4+2\sqrt{2}}$.

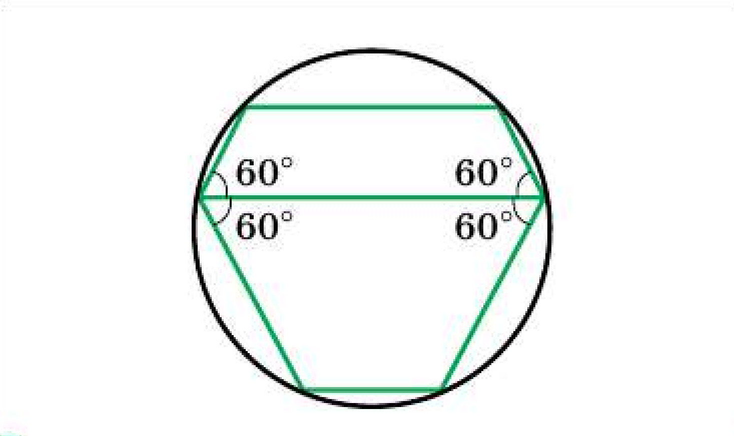


Рисунок к задаче 6.32

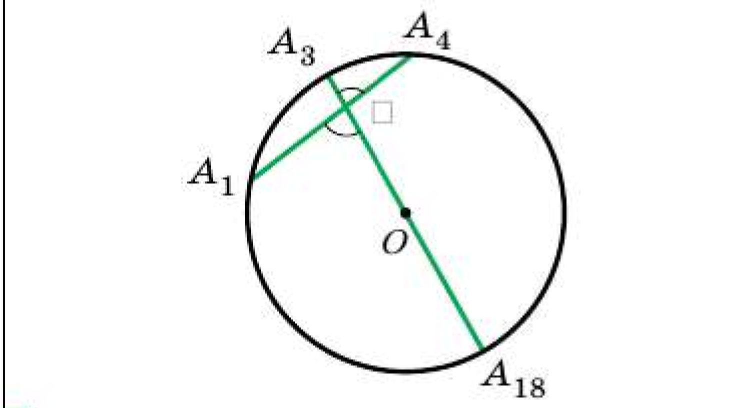


Рисунок к задаче 6.36

6.27. $\dfrac{a(2+\sqrt{3})}{2}$. **6.28.** $\dfrac{a(2+\sqrt{2})}{2}$. **6.30.** 6. *Указание*. Найдите углы правильного $2n$-угольника. **6.31.** 168° или 48°. *Указание*. Рассмотрите два случая: точка M принадлежит пятиугольнику и точка M лежит вне его. **6.32.** Нет (см. рисунок). **6.33.** 1) 30° или 60°; 2) 60°. **6.35.** *Указание*. Докажите, что $AM = BC$, и воспользуйтесь тем, что $\triangle ABC \sim \triangle CMB$. **6.36.** 84°. *Указание*. Прямая OA_3 содержит диагональ A_3A_{18} (см. рисунок). Имеем: $\angle A_1BA_{18} = \dfrac{1}{2}(\cup A_1A_{18} + \cup A_3A_4)$. **6.37.** Существует. *Указание*. Рассмотрите правильный 12-угольник $A_1A_2...A_{12}$ и его диагонали A_1A_3, A_3A_5, A_1A_7. **6.38.** R. *Указание*. Пусть прямые A_1A_4 и OA_3, где O — центр описанной окружности, пересекаются в точке B. Докажите, что треугольники OBA_4, BA_4A_3 и OA_1B равнобедренные. **6.39.** *Указание*. Докажите, что точки касания вписанной окружности со сторонами пятиугольника делят каждую сторону пополам. **6.41.** *Указание*. См. рисунок. **6.42.** Треугольников, или квадратов, или шестиугольников. *Указание*. Около одной точки можно уложить столько дощечек, во сколько раз угол при вершине дощечки, равный $\dfrac{180°(n-2)}{n}$, меньше

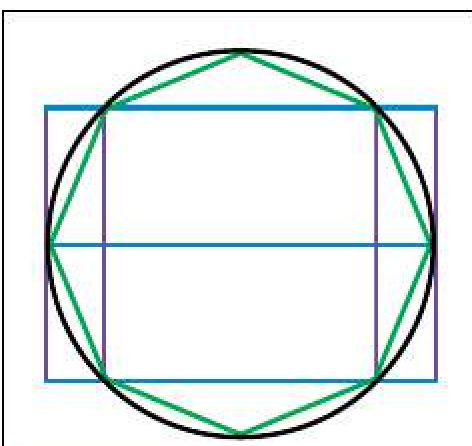


Рисунок к задаче 6.41

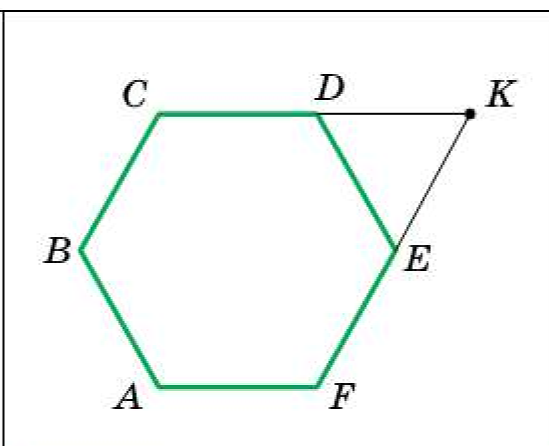


Рисунок к задаче 6.43

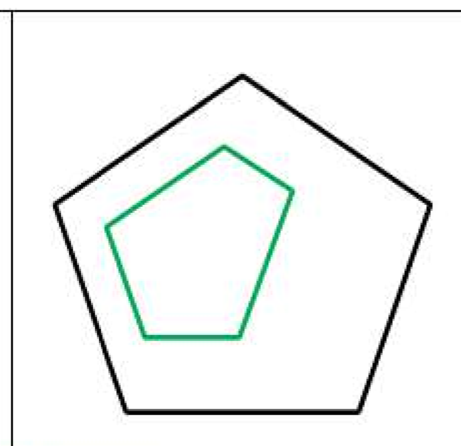


Рисунок к задаче 6.48

$360°$, т. е. $360° : \frac{180°(n-2)}{n} = \frac{2n}{n-2}$ дощечек. Значение выражения $\frac{2n}{n-2}$ должно быть натуральным числом. Так как $\frac{2n}{n-2} = \frac{2n-4+4}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2}$, то значение выражения $\frac{4}{n-2}$ должно быть натуральным числом. **6.43.** *Указание*. Пусть $ABCDEF$ — правильный шестиугольник (см. рисунок), K — точка пересечения прямых CD и EF. Тогда AK — искомый отрезок. **6.45.** Да. *Указание*. Пусть точка O — центр описанной окружности данного пятиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5$. Тогда $\angle A_1OA_3 = \angle A_2OA_4$. Отсюда $\angle A_1OA_2 = \angle A_3OA_4$. Следовательно, $A_1A_2 = A_3A_4$. Аналогично можно показать, что $A_3A_4 = A_5A_1$. **6.46.** *Указание*. Рассмотрите правильный пятиугольник, вписанный в данную окружность. **6.47.** *Указание*. Пусть $A_1A_2...A_{15}$ — данный правильный 15-угольник. Тогда пятиугольники $A_1A_4A_7A_{10}A_{13}$, $A_2A_5A_8A_{11}A_{14}$, $A_3A_6A_9A_{12}A_{15}$ — правильные. В одном из этих пятиугольников отметили по крайней мере три вершины. **6.48.** *Указание*. Так как углы данного пятиугольника равны, то его можно расположить внутри правильного пятиугольника, стороны которого параллельны сторонам данного пятиугольника (см. рисунок). Далее воспользуйтесь результатом задачи 6.34. **7.7.** $22{,}5°$. **7.13.** $\sqrt{6}$ см. **7.14.** 1) $\frac{25(\pi - 2\sqrt{2})}{8}$ см^2; 2) $\frac{25(5\pi - 3)}{12}$ см^2; 3) $\frac{25(11\pi + 3)}{12}$ см^2. **7.15.** 1) $\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{3}$ см^2; 2) $\frac{10\pi + 3\sqrt{3}}{3}$ см^2. **7.17.** 2π см, $\frac{10\pi}{3}$ см, $\frac{20\pi}{3}$ см. **7.18.** $\frac{25\pi}{18}$ см, $\frac{35\pi}{18}$ см, $\frac{20\pi}{3}$ см. **7.19.** $\frac{8\pi}{3}$ см. **7.20.** 6π см. **7.23.** $\frac{a^2(\pi - 2)}{8}$. **7.24.** $\frac{a^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{36}$. **7.25.** 50 см. **7.26.** 1 : 1. *Указание*. Докажите, что в обоих случаях сумма длин полуокружностей равна $\frac{1}{2}\pi AB$. **7.27.** $\frac{\pi R^2}{9}$. **7.28.** $a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$. **7.29.** $\frac{2\pi a}{3}$. *Указание*. Рассмотрите треугольник AND и докажите, что он равносторонний. **7.31.** $2\pi R\left(1 - \frac{l}{\pi r}\right)$. **7.33.** $\left(\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}\right)$ см. **7.34.** $R^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)$. **7.36.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **7.38.** $64\sqrt{3} - \frac{88\pi}{3}$. *Указание*. Проведите $O_1M \perp O_2B$. Докажите, что $\angle O_2O_1M = 30°$. **7.39.** *Указание*. Общая часть квадратов содержит круг, радиус которого равен $\frac{1}{2}$ см (см. рисунок).

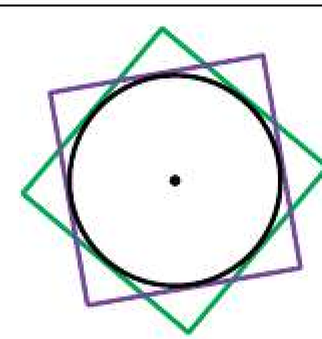


Рисунок к задаче 7.39

Глава 3. 8.6. (1; 2). **8.7.** (1; –4) или (–1; 1). **8.12.** 1) Да, точка B лежит между точками A и C; 2) нет. **8.14.** $x = 7$ или $x = -1$. **8.15.** (3; 0). **8.16.** (0; 0,5). **8.17.** (–3; 7). **8.18.** (–2; 2). **8.19.** (3; –2). **8.23.** A (–5; 3), C (7; 5). **8.24.** $2\sqrt{73}$. **8.26.** $(3\sqrt{3}\,;\ 2\sqrt{3})$ или $(-3\sqrt{3}\,;\ -2\sqrt{3})$. **8.27.** $(-2;\ 4\sqrt{3})$ или $(-2;\ -4\sqrt{3})$. **8.28.** (3; 3) или (–6; 6). *Указание*. Рассмотрите два случая: B (a; a) или B (a; $-a$). **8.29.** (5,5; 0), (3; 0), (–1; 0). *Указание*. Рассмотрите три случая: $AC = BC$, $AC = AB$ и $BC = AB$. **8.30.** (0; 6), (0; 4), (0; 3,5), (0; 8,5). *Указание*. Рассмотрите три случая: $AC^2 + BC^2 = AB^2$, $AB^2 + BC^2 = AC^2$, $AC^2 + AB^2 = BC^2$. **8.31.** (3; 3) или (15; 15). **8.32.** (–2; 2) или (–10; 10). **8.34.** $\frac{4\sqrt{5}}{3}$. **8.35.** 9. **8.37.** $\left(\frac{13}{3};3\right)$. **8.38.** *Указание*. Обозначим данный 10-угольник так: $A_1A_2...A_{10}$. Рассмотрите два пятиугольника $A_1A_3A_5A_7A_9$ и $A_2A_4A_6A_8A_{10}$. Далее воспользуйтесь идеей решения задачи 4 § 8. **8.39.** Нет. *Указание*. Расположим систему координат так, чтобы начало координат совпало с неотмеченной вершиной квадрата, а оси координат совпадали с линиями сетки. Тогда чётность координат точки X совпадает с чётностью координат или точки A, или точки B. Учтём, что у неотмеченной вершины квадрата обе координаты чётные. **9.12.** Две окружности: $x^2 + (y - 11)^2 = 45$ и $x^2 + (y + 1)^2 = 45$. **9.13.** $(x - 3)^2 + y^2 = 50$. **9.15.** 1) Да, точка (–1; 5) — центр окружности, $R = 7$; 2) нет; 3) нет; 4) да, точка (2; 7) — центр окружности, $R = \sqrt{2}$. **9.16.** 1) Точка (0; –8) — центр окружности, $R = 2$; 2) точка (4; –2) — центр окружности, $R = \sqrt{5}$. **9.21.** 5. **9.22.** 13. **9.23.** $(x - 2)^2 + y^2 = 13$. **9.24.** $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ или $(x - 3)^2 + (y - 8)^2 = 25$. **9.25.** $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 10$ или $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 10$. **9.26.** $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$ или $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$. *Указание*. Диаметр искомой окружности равен расстоянию между осью абсцисс и прямой $y = -4$, а центр окружности принадлежит биссектрисе третьего или четвёртого координатного угла. **9.27.** $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ или $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$. **9.28.** 1) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$; 2) $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 169$. **9.30.** $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 9$ или $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 49$. *Указание*. Окружности могут касаться как внешним, так и внутренним образом. **9.31.** $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$ или $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 225$. **9.32.** $(x^2 + y^2 - 16)(x^2 + y^2 - 4) = 0$. **9.33.** $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + (y - \sqrt{2})^2 = \frac{9}{4}$ или $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + (y + \sqrt{2})^2 = \frac{9}{4}$. **9.34.** (3; 4), (–4; 3), (–3; –4), (4; –3). **9.35.** $(0;\ 2\sqrt{3})$, $(3;\ -\sqrt{3})$, $(-3;\ -\sqrt{3})$. **9.36.** Если $a < 10$, то пустое множество; если $a = 10$, то точка M (2; –3); если $a > 10$, то окружность $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = \frac{a}{2} - 5$. **9.37.** *Указание*.

Сложите почленно левые и правые части уравнений парабол. **10.6.** 1) $y = 2x - 5$; 2) $x = 3$; 3) $y = -1$; 4) $5x + 3y = 6$. **10.7.** 1) $y = -3x + 1$; 2) $x - 6y = 12$. **10.8.** $y = -0{,}5x - 4$. **10.9.** $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}$. **10.11.** 12. **10.12.** 28. **10.13.** 6. **10.14.** (2; 5), (5; 2). **10.15.** (5; 0). **10.17.** $\frac{10\sqrt{29}}{29}$. *Указание.* Искомое расстояние равно высоте треугольника, ограниченного осями координат и данной прямой. **10.18.** $4\sqrt{2}$. **10.19.** $3\sqrt{10}$. **10.20.** $x - 3y = 2$. **10.21.** $7x + 5y = -8$. **10.22.** $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 17$. **10.23.** $(y - 4)(y + 4) = 0$. **11.6.** 1) $y = 0{,}1x$; 2) $y = (2 - \sqrt{3})\,x$. **11.7.** 1) $y = 4x + 19$; 2) $y = -3x - 2$; 3) $y = 7$. **11.8.** $y = -0{,}5x - 4$. **11.9.** 1) $y = -7x + 2$; 2) $3x - 4y = -39$. **11.10.** 1) $y = 9x + 13$; 2) $3x + y = 9$. **11.11.** 1) $y = 5x - 11$; 2) $y = -2x + 3$. **11.12.** 1) $y = x + 2$; 2) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. **11.13.** 1) $y = x\sqrt{3} + 6 - 2\sqrt{3}$; 2) $y = -x\sqrt{3} + 6 + 2\sqrt{3}$. **11.14.** 1) $y = x - 5$; 2) $y = -x + 1$. **11.15.** *а*) $y = \frac{x\sqrt{3}}{3} + 3$; *б*) $y = -\frac{x\sqrt{3}}{3} + 2$. **11.16.** $y = x - 1$; $y = 1 - x$; $y = x\sqrt{3} + 1$; $y = -x\sqrt{3} - 1$. **11.17.** 1) Да; 2) да; 3) нет; 4) нет. **11.19.** 1) (0; –1), $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$; 2) (0; 0,8), $\left(\frac{4}{3}; 0\right)$. **11.20.** 1) 2,6; 2) $\frac{28}{13}$. **11.21.** $\frac{13}{30}$. **11.22.** 1) $4x - 3y = 11$; 2) $3x - 4y = 1$. **11.23.** $y = 4x + 9$. **11.24.** $y = 3x - 12$. **11.25.** $x + 2y = 6$. **11.26.** $2x - 4y = -1$. **11.27.** $y = 3x - 12$. **11.28.** $8y - 3x = 21$, $3y - x = -26$, $5y - 2x = 47$. **11.29.** $y = -2x + 9$. **11.30.** $y = 4$. **11.31.** 6. *Указание.* Найдите расстояние от точки C до прямой AB. **11.32.** $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = \frac{841}{289}$. **11.33.** Прямая $5x - 12y = 2$. **11.34.** $3x - 4y = 17$. **11.35.** $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 32$. **11.36.** Две прямые: $(x + y - 15)(7x - 7y - 1) = 0$. *Указание.* Воспользуйтесь формулой расстояния от точки до прямой. **11.37.** 1) 4; 2) 0,7. **11.38.** $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 1$; $(x + 6)^2 + (y + 6)^2 = 1$; $\left(x + \frac{2}{7}\right)^2 + \left(y + \frac{12}{7}\right)^2 = 1$; $\left(x + \frac{12}{7}\right)^2 + \left(y + \frac{2}{7}\right)^2 = 1$. **11.39.** $x + 3y = 13$ и $9x - 13y = 37$. **11.40.** $x + y = 3\sqrt{2} + 3$; $x + y = -3\sqrt{2} + 3$. **11.41.** 5. *Указание.* Точка A должна быть основанием перпендикуляра, опущенного из центра окружности на прямую, а точка B должна принадлежать этому перпендикуляру. **12.1.** Прямая, перпендикулярная прямой AB. **12.2.** Пустое множество, или середина отрезка AB, или окружность с центром в середине отрезка AB. **12.3.** Пустое множество, или точка, или окружность. *Указание*. Выберите систему координат так, как показано на рисунке. Покажите, что если $a^2 + b^2 < 1$, то получим пустое множество; если $a^2 + b^2 = 1$, то точку $D(-a; -b)$; если $a^2 + b^2 > 1$, то окружность с центром в точке $D(-a; -b)$. **12.4.** Пустое множество, или точка пересечения медиан треугольника ABC, или окружность с центром в точке пересечения медиан треугольника ABC. *Указание*. Воспользуйтесь формулой Лейбница. **12.5.** Окружность радиуса $\frac{4}{3}AB$, центр которой делит отрезок AB в отношении 2 : 1, считая от вершины A. **12.6.** Окружность с центром в точке B_1 такой, что точка A является серединой отрезка BB_1. Радиус окружности равен $2AB$. **12.7.** Окружность без точек пересечения с прямой AB. Центр окружности находится в точке B_1 такой, что точка A является серединой отрезка BB_1, радиус окружности равен $2d$. **12.8.** Окружность с центром в точке K такой, что K делит AB в отношении 3 : 2, считая от точки A, без точек, принадлежащих прямой AB. Радиус окружности равен $\frac{4}{3}AB$. **12.9.** Две прямые, пересекающиеся в точке B_1 такой, что точка A — середина отрезка BB_1, без самой точки B_1. Эти прямые образуют угол $30°$ с прямой AB. **12.10.** Прямая, проходящая через середину гипотенузы и перпендикулярная медиане, проведённой из вершины C. **12.11.** Отрезок без концов. **12.13.** $3\sqrt{2}$. *Указание*. Выберите систему координат так, как показано на рисунке (точка O — середина отрезка AB). Вершина C принадлежит двум окружностям: описанной окружности треугольника ABC и окружности с центром в точке D радиуса $2\sqrt{2}$. Найдите уравнения этих окружностей. **12.14.** $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. **12.15.** $\frac{\sqrt{73}}{5}$. *Указание*. Воспользуйтесь теоремой

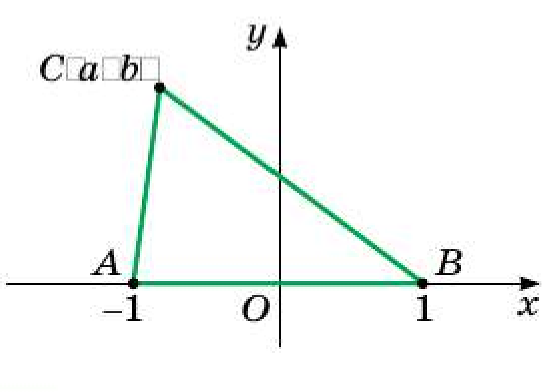


Рисунок к задаче 12.3

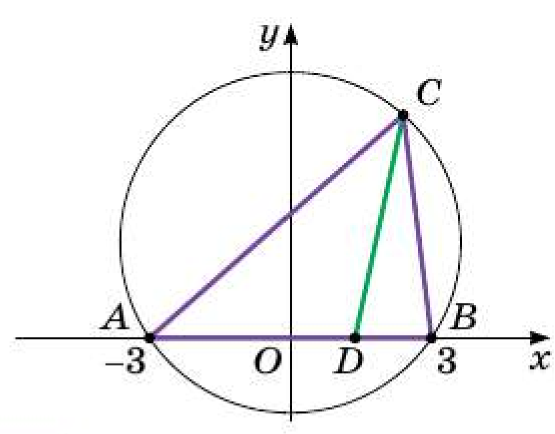


Рисунок к задаче 12.13

8.1. **12.16.** $2(R^2 + r^2)$. **12.17.** 9 и 1. *Указание*. Рассмотрите две концентрических окружности с центром в начале координат и радиусами 1 и 2.

Глава 4. **13.12.** 3) Нет. *Указание*. Возможен случай, когда $\vec{m} = \vec{n} = \vec{0}$. **13.22.** Прямоугольник или равнобокая трапеция. **14.17.** $\overrightarrow{AF}(-2;\ 2)$, $\overrightarrow{FD}(2;\ 4)$. **14.18.** $\overrightarrow{DE}(-4;\ 6)$, $\overrightarrow{EO}(-4;\ -6)$. **14.19.** $\vec{a}(-6;\ -8)$ или $\vec{a}(8;\ 6)$. **14.20.** $\vec{c}(\sqrt{2};\ \sqrt{2})$ или $\vec{c}(-\sqrt{2};\ -\sqrt{2})$. **14.21.** $C(7;\ 17)$, $D(2;\ 17)$ или $C(7;-7)$, $D(2;-7)$. **14.22.** $B(16;\ 2)$, $C(16;\ -6)$ или $B(-14;\ 2)$, $C(-14;\ -6)$. **15.46.** 1) Да; 2) да; 3) нет. **15.47.** *Указание*. Достаточно показать, что $\overrightarrow{XA} - \overrightarrow{XB} = \overrightarrow{XD} - \overrightarrow{XC}$. **15.48.** 0,2 м/с, $\sqrt{1{,}04}$ м/с. **15.49.** 60ϒ. **15.50.** *Указание*. Покажите, что каждый из векторов $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ равен нуль-вектору. **15.52.** Окружность радиуса AB с центром в точке A. **15.53.** Серединный перпендикуляр отрезка AB. **15.54.** *Указание*. Пусть отрезок AA_1 — медиана треугольника ABC. На продолжении отрезка AA_1 за точку A_1 отложите отрезок A_1D, равный MA_1. **15.55.** *Указание*. Пусть при некотором выборе системы координат точки имеют координаты $A_1(x_1;\ y_1)$, $A_2(x_2;\ y_2)$, ..., $A_n(x_n;\ y_n)$. Рассмотрите точку $M\left(\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n};\ \dfrac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n}\right)$. **15.56.** *Указание*. Имеем: $\overrightarrow{A_2A_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{B_2C_1} + \overrightarrow{C_1C_2} + \overrightarrow{C_2A_2} = \vec{0}$, $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_2C_1} + \overrightarrow{C_2A_2} = \vec{0}$, отсюда $\overrightarrow{A_2A_1} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2} = \vec{0}$. **16.28.** -4; 4. **16.29.** $-1{,}5$. **16.31.** $\vec{m}(-15;\ 36)$. **16.32.** $\vec{a}(-3;\ 4)$. **16.35.** $x = 2$, $y = -3$. **16.38.** $\overrightarrow{OK} = 0{,}5\vec{a} - 0{,}1\vec{b}$. **16.42.** 1) $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$. **16.46.** *Указание*. $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1B_1} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{B_2M_2}$. С другой стороны, $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1A_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2M_2}$. Сложите эти равенства. **16.47.** *Указание*. Воспользуйтесь ключевой задачей 16.46. **16.49.** *Указание*. Воспользуйтесь ключевой задачей 6 § 16. **16.50.** *Указание*. Пусть отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 — медианы треугольника ABC. Докажите, что $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$. **16.52.** *Указание*. Имеем: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. **16.53.** *Указание*. Воспользуйтесь задачей 16.46 и ключевой задачей 1 § 16. **16.54.** *Указание*. Выразите векторы $\overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{BN}$ через векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$. **16.56.** *Указание*. Воспользуйтесь задачей 16.55. **16.57.** *Указание*. Пусть точки M_1, M_2, M_3 и M_4 — середины соответственно отрезков AH_1, BH_2, CH_3 и DH_4. Докажите, что $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_3} = \overrightarrow{OM_4} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$, где O — центр описанной окружности. **16.58.** *Указание.* Пусть точка H — ортоцентр треугольника ABC. Тогда из ключевой задачи 6 § 16 следует, что $\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$. Из этого равенства следует, что точка H принадлежит описанной окружности ABC. **16.59.** *Указание.* Рассмотрите четырёхугольник $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O. Пусть точки M и N — середины сторон BC и AD соответственно. Докажите, что векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$ противоположны. Разложите векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$ по базису $(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC})$. **16.60.** *Указание.* Пусть O — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что $\overrightarrow{OA} = k\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{OD}$. **16.61.** *Указание.* Воспользовавшись ключевой задачей 16.46, можно записать: $\overrightarrow{KF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{MQ})$, $\overrightarrow{MQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AE})$. Отметим, что $\overrightarrow{PN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$. **16.62.** *Указание.* Воспользовавшись ключевой задачей 5 § 16, запишем: $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$. Так же $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN})$. Далее выразите вектор $\overrightarrow{AK}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$. **16.63.** *Указание.* Пусть точка N — середина отрезка EF, а медианы AA_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Пусть $AP : PC = m : n$. Так как $PE \parallel CC_1$ и $PF \parallel AA_1$, то $AE : EB = m : (m + 2n)$, $CF : FB = n : (n + 2m)$. Воспользовавшись ключевой задачей 5 § 16, запишем $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$. Далее, $\overrightarrow{PN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PE} + \overrightarrow{PF})$. Воспользуйтесь ключевой задачей 2 § 16 и выразите вектор $\overrightarrow{PE}$ через векторы $\overrightarrow{PA}$ и $\overrightarrow{PB}$, а вектор $\overrightarrow{PF}$ через векторы $\overrightarrow{PB}$ и $\overrightarrow{PC}$. **16.64.** *Указание.* Для точки O и треугольников ABC и PQR воспользуйтесь ключевой задачей 5 § 16. **16.65.** *Указание.* Воспользовавшись ключевой задачей 6 § 16, запишем: $\overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC_1}$, $\overrightarrow{OH_2} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OH_3} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB_1}$. Покажите, что векторы $\overrightarrow{H_2H_1}$ и $\overrightarrow{H_2H_3}$ коллинеарны. **17.16.** $\vec{b}(-12; 16)$. **17.18.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) 1; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 0. **17.21.** –3 и 3. **17.22.** –1. **17.23.** –1 и 1. **17.25.** 4. **17.26.** –0,5. **17.28.** $\sqrt{7}$. **17.29.** $2\sqrt{7}$. **17.32.** 0, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$. **17.33.** 30°, 60°, 90°. **17.36.** 0°. **17.37.** 120°. **17.38.** $\frac{\sqrt{259}}{2}$. *Указание.* $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. **17.39.** *Указание.* $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. **17.40.** *Указание.* Докажите, что

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. **17.41.** *Указание*. Пусть $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Тогда $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{AK} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$. Найдите $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AK}$. **17.42.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **17.43.** 45°. *Указание*. Пусть $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Очевидно, что $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$. Тогда $\overrightarrow{AO} = 2\vec{c}$, $\overrightarrow{DO} = 3\vec{b}$. Отсюда $\overrightarrow{AB} = 2\vec{c} + \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c} + 3\vec{b}$. **17.44.** 30°. *Указание*. $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$. Отсюда $\overrightarrow{BD}^2 = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC})$, $\overrightarrow{BD}^2 = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BD}||\overrightarrow{BA}|\cos\angle ABD$. **17.45.** 4. *Указание*. Разложите вектор $\overrightarrow{AD}$ по базису $(\overrightarrow{AK}; \overrightarrow{AM})$. **17.46.** $\frac{\sqrt{21}}{2}$. *Указание*. Пусть точки M и N — середины сторон AD и BC соответственно. Тогда с помощью ключевой задачи 16.46 можно записать $\overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD})$. **17.47.** 60°. **17.48.** $AK : KB = 2 : 1$. *Указание*. Пусть $AK : KB = m : n$. Разложите векторы $\overrightarrow{CK}$ и $\overrightarrow{AM}$ по базису $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB})$. **17.49.** $1 : 4$. **17.50.** *Указание*. $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$, $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BF}$. Осталось показать, что $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{MF} = 0$. **17.51.** *Указание*. Рассмотрите векторы $\vec{l_1}$, $\vec{l_2}$ и $\vec{l_3}$, сонаправленные с векторами $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$, такие, что $|\vec{l_1}| = |\vec{l_2}| = |\vec{l_3}| = 1$. Воспользуйтесь очевидным неравенством $(\vec{l_1} + \vec{l_2} + \vec{l_3})^2 \geqslant 0$.

Глава 5. **18.25.** $f(A) = A$, $f(A) = B$, $f(A) = C$. **18.26.** Нет. **19.8.** При $AB \parallel a$. **19.18.** Бесконечно много. **19.21.** $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 1$. **19.22.** $y = x^2 - 4x + 1$. **19.24.** *Указание*. Пусть $ABCD$ — искомая трапеция ($BC \parallel AD$). Постройте образ диагонали BD при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{BC}$. **19.26.** *Указание*. Постройте образ данной прямой при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AB}$ (или $\overrightarrow{BA}$). Рассмотрите точки пересечения образа с данной окружностью. Заметим, что если построенный образ и данная окружность не имеют общих точек, то задача не имеет решения. **19.28.** *Указание*. Пусть $T_{\overrightarrow{OO_1}}(M) = M_1$, где O и O_1 — центры окружностей. Тогда $BM_1 \parallel AM$. Отсюда $T_{\overrightarrow{OO_1}}(A) = B$. **19.29.** *Указание*. Пусть $ABCD$ — искомый четырёхугольник с данными сторонами AB и CD (см. рисунок). Пусть $T_{\overrightarrow{BC}}(A) = A_1$. Треугольник A_1CD можно построить по двум сторонам CD и $CA_1 = BA$ и углу A_1CD, равному $\angle BCD - (180^\circ - \angle ABC)$.

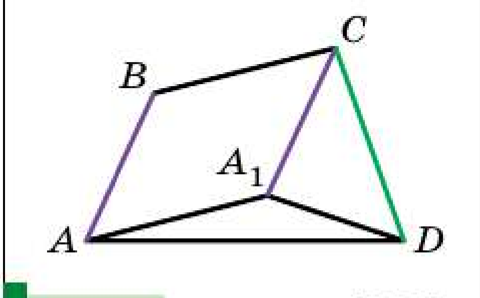


Рисунок к задаче 19.29

Треугольник AA_1D можно построить по стороне A_1D и двум прилежащим углам AA_1D и ADA_1. **19.30.** *Указание.* Пусть $T_{\overline{MN}}(A) = A_1$. Соедините точки A_1 и B. **19.31.** $90°$. *Указание.* Пусть $T_{\overline{AB}}(M) = M_1$. Воспользуйтесь тем, что около четырёхугольника MBM_1C можно описать окружность. **19.32.** *Указание.* Пусть $T_{\overline{BC}}(M) = M_1$. Докажите, что около четырёхугольника MCM_1D можно описать окружность. **20.20.** $a \perp l$ или прямые a и l совпадают. **20.23.** *Указание.* Если четырёхугольник имеет ось симметрии, то образом любой его вершины является вершина этого же четырёхугольника. Выберите некоторую вершину параллелограмма и рассмотрите две возможности: её образом является или соседняя вершина, или противолежащая. **20.25.** *Указание.* Углы M_1BA и MBA симметричны относительно прямой AB. Следовательно, $\angle M_1BA = \angle MBA$. Аналогично $\angle M_2BC = \angle MBC$. Осталось показать, что $\angle M_1BM_2 = 180°$. **20.26.** 1) $A_1\,(0; -2)$, $B_1\,(-1; 3)$; 2) $A_2\,(0; 2)$, $B_2\,(1; -3)$. **20.27.** $x = 2$, $y = -1$. **20.31.** $\frac{m^2}{4}$. *Указание.* Пусть $M_1 = S_{AC}(M)$. Докажите, что треугольники M_1AM и ABC равновелики. **20.32.** *Указание.* Пусть точка A_1 — образ точки A при симметрии относительно прямой a. Тогда точка пересечения прямых a и A_1B будет искомой. Заметим, что если точки A и B симметричны относительно прямой a, то задача имеет бесконечно много решений. Если точки A и B равноудалены, но не симметричны относительно прямой a, то задача не имеет решения. **20.34.** *Указание.* Пусть $A_1 = S_a(A)$. Точка пересечения прямых A_1B и a является искомой. **20.35.** *Указание.* Воспользуйтесь задачей 2 § 20. **20.36.** *Указание.* Воспользуйтесь задачей 3 § 20. **20.37.** *Указание.* Пусть $C_1 = S_{AD}(C)$. Проведите прямую BC_1. **20.38.** *Указание.* Пусть прямые l и m — серединные перпендикуляры. Покажите, что $C = S_l(AB) \cap S_m(AB)$. **20.39.** *Указание.* Образы точки A при симметрии относительно прямых, содержащих биссектрисы, лежат на прямой BC. **20.40.** *Указание.* Пусть прямые l и m — серединные перпендикуляры сторон AB и BC соответственно. Пусть $D_1 = S_l(D)$, $D_2 = S_m(D)$. Точки D_1 и D_2 лежат соответственно на прямых DC и DA. Отметим, что если острый угол параллелограмма равен $60°$, то задача имеет бесконечно много решений. **20.41.** *Указание.* Пусть точка A_1 симметрична точке A относительно этой биссектрисы. $AM + MB = A_1M + MB > A_1B = A_1C + CB = AC + CB$. **20.42.** 6, если треугольник ABC не является прямоугольным; 3, если треугольник ABC прямоугольный.

20.43. *Указание*. Пусть треугольник A_1BC — образ треугольника ABC при симметрии относительно серединного перпендикуляра отрезка BC (см. рисунок). Треугольник ACA_1 можно построить по известным сторонам AC и A_1C ($A_1C = AB$) и углу ACA_1, равному разности углов B и C. **20.45.** *Указание*. Пусть точка C_1 симметрична точке C относительно прямой AB. Постройте окружность с центром в точке C_1, которая касается прямой AB. Проведите через точку D касательную к построенной окружности. **20.46.** *Указание*. Пусть $C_1 = S_l(C)$. На отрезке C_1D как на диаметре постройте окружность. **20.47.** *Указание*. Пусть прямая l — серединный перпендикуляр диагонали AC, $B_1 = S_l(B)$. Воспользуйтесь тем, что четырёхугольники $ABCD$ и AB_1CD равновелики. **20.48.** *Указание*. Пусть $B_1 = S_{AC}(B)$. Точка B_1 лежит на прямой AD. В треугольнике B_1CD известны все три стороны. **20.49.** *Указание*. Воспользуйтесь ключевой задачей 20.30. **20.50.** 60°. *Указание*. Докажите, что точка C — центр вневписанной окружности треугольника ABD. **20.51.** 90°. *Указание*. Пусть $C_1 = S_{AB}(C)$, $D_1 = S_{AB}(D)$. Докажите, что в четырёхугольник D_1C_1CD можно вписать окружность. **20.52.** *Указание*. Пусть $B_1 = S_{AM}(B)$, $C_1 = S_{DM}(C)$. Докажите, что треугольник B_1MC_1 равносторонний. **20.53.** 30°. *Указание*. Докажите, что $S_{CE}(D) = S_{CA}(B) = O$, где O — центр описанной окружности треугольника ACE.

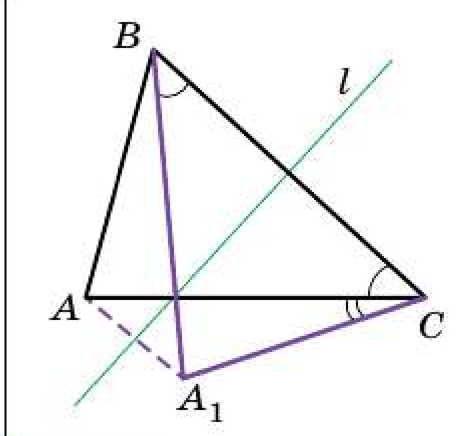


Рисунок к задаче 20.43

21.13. *Указание*. Пусть треугольник ABC имеет центр симметрии. Тогда, например, образом вершины A является вершина B. Следовательно, центр симметрии — это середина стороны AB. Однако в этом случае образ вершины C не будет принадлежать треугольнику ABC. **21.16.** *Указание*. При центральной симметрии образом стороны данного четырёхугольника является сторона этого же четырёхугольника. Далее воспользуйтесь ключевой задачей 1 § 21. **21.17.** *Указание*. Рассмотрите центральную симметрию с центром в точке пересечения диагоналей одного из параллелограммов. **21.18.** *Указание*. При симметрии относительно точки O образы точек A_1 и B_1 принадлежат окружности с центром O_2. Поскольку образом прямой, проходящей через центр симметрии, является эта же прямая, то образы точек A_1 и B_1 также принадлежат прямой A_1B_1. Следовательно, отрезок A_2B_2 — образ отрезка A_1B_1. **21.19.** *Указание*. Рассмотрите симметрию данной прямой относительно данной точки. **21.21.** *Указание*. Отобразите одну из окружностей симметрично относительно точки D. Точка пересечения второй окружности с полученной — вершина треугольника. **21.22.** *Указание*. Покажите, что $S_O(\triangle BMC) = \triangle DNA$. **21.24.** *Указание*. Докажите, что если общая точка двух окружностей является центром симметрии, при которой одна из окружностей является образом другой, то эти окружности касаются. **21.25.** *Указание*. Воспользуйтесь результатом задачи 20.25. **21.26.** *Указание*. Найдите середину отрезка AC, а далее воспользуйтесь задачей 2 § 21. **21.28.** *Указание*. Точку C (см. рисунок) можно найти как точку пересечения прямых l_2 и l_1' — образ прямой l_1 при центральной симметрии относительно точки O.

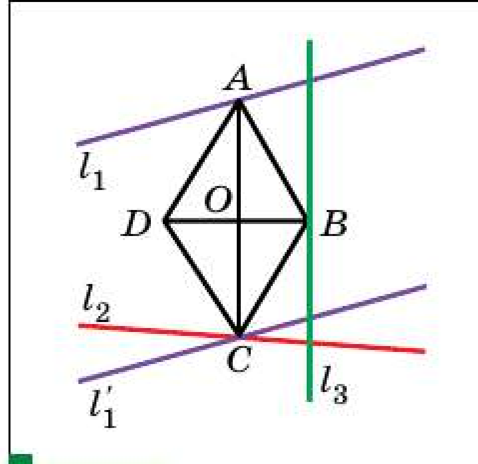


Рисунок **к задаче 21.28**

21.30. *Указание*. Покажите, что при симметрии с центром в точке пересечения диагоналей параллелограмма образами прямых MC, MD, MA и MB будут проведённые прямые. **21.31.** *Указание*. Постройте образ одной из окружностей при центральной симметрии относительно точки M. **21.32.** *Указание*. Пусть $P_1 = S_C(P)$. Тогда $AP + BQ = P_1B + BQ$. **21.33.** *Указание*. Пусть точки K, M, N и L — соответственно середины сторон AB, BC, CD и DA вписанного четырёхугольника $ABCD$. Покажите, что при симметрии относительно точки пересечения прямых KN и ML образами проведённых прямых являются серединные перпендикуляры сторон четырёхугольника. **21.35.** 1 : 1. *Указание*. Объединением данной трапеции и её образа при симметрии относительно середины стороны CD является квадрат. **21.36.** *Указание*. Выберите на меньшей окружности произвольную точку. Взяв её в качестве центра симметрии, постройте образ меньшей окружности. **22.10.** *Указание*. Пусть $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{a}$. Рассмотрим поворот с центром O на угол $\frac{360\Upsilon}{n}$, например, против часовой стрелки. Очевидно, что при таком преобразовании образом данного n-угольника будет этот же n-угольник. Следовательно, искомая сумма не изменится. А это возможно только тогда, когда $\vec{a} = \vec{0}$. **22.11.** 2 см или 1 см. **22.12.** 2 см. *Указание*. При рассматриваемом повороте точка B является образом точки D, точка C_1 — образом точки C, точка A — образом точки A (см. рисунок). Следовательно, $\triangle ABC_1$ — образ $\triangle ADC$. Отсюда $\angle ABC_1 = \angle ADC = 90°$. Значит, точки C_1, B, C лежат на одной прямой. **22.13.** *Ука-*

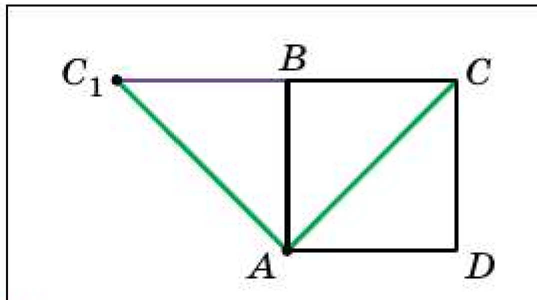


Рисунок **к задаче 22.12**

зание. Воспользуйтесь идеей решения задачи 2 § 22. **22.16.** *Указание*. Рассмотрите поворот $R_A^{90^\circ}$. **22.17.** 60°. *Указание*. Рассмотрите поворот $R_C^{60^\circ}$. **22.18.** *Указание*. Рассмотрите поворот $R_O^{90^\circ}$. **22.19.** 120°. *Указание*. Рассмотрите поворот $R_O^{120^\circ}$. **22.20.** 120°. *Указание*. Докажите, что $AD = 2BC$. Рассмотрите поворот с центром O на угол 120°. **22.21.** 60°. **22.22.** *Указание*. Рассмотрите поворот $R_A^{90^\circ}$. **22.23.** *Указание*. Рассмотрите поворот $R_A^{60^\circ}$. **22.25.** *Указание*. Покажите, что при повороте $R_O^{90^\circ}$ одна из диагоналей четырёхугольника $ABCD$ является образом другой диагонали. **22.26.** *Указание*. Пусть l_1, l_2, l_3 — данные параллельные прямые, O — произвольная точка прямой l_2 (см. рисунок). Прямая l_1' — образ прямой l_1 при повороте вокруг точки O против часовой стрелки на угол 60° — пересекает прямую l_3 в точке M. Найдём прообраз точки M при этом повороте. Очевидно, что он принадлежит прямой l_1. Поэтому достаточно отложить от луча OM угол, равный 60°. **22.28.** *Указание*. Рассмотрим поворот с центром A против часовой стрелки на угол 90°. При этом повороте образом отрезка AD будет отрезок AB (см. рисунок). Пусть E_1 — образ точки E. Тогда треугольник ABE_1 — образ треугольника ADE. Отсюда $\triangle ABE_1 = \triangle ADE$. Тогда $DE = BE_1$, $AE = AE_1$, $\angle E_1AB = \angle EAD$. Имеем: $\angle E_1AF = \angle E_1AB + \angle BAF = \angle EAD + \angle FAE = \angle FAD$. Но $\angle FAD = \angle E_1FA$. Следовательно, треугольник AE_1F равнобедренный и $AE_1 = E_1F$. **22.29.** *Указание*. Рассмотрим поворот с центром A по часовой стрелке на угол 60° (см. рисунок). При этом повороте образом треугольника ABP будет треугольник ACP_1 (точка P_1 — образ точки P). Отсюда $\angle AP_1C = \angle APB = 150°$. Треугольник APP_1 равносторонний. Тогда $\angle AP_1P = 60°$. Следовательно, $\angle PP_1C = 90°$. Осталось заметить, что $P_1C = PB$ и $PP_1 = AP$.

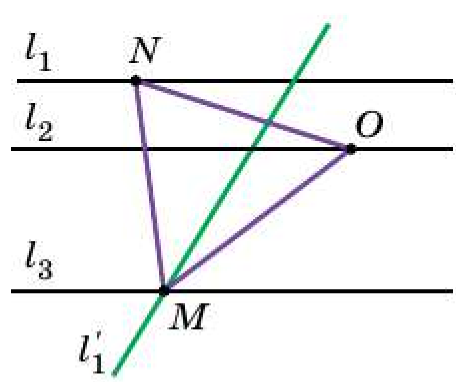


Рисунок к задаче 22.26

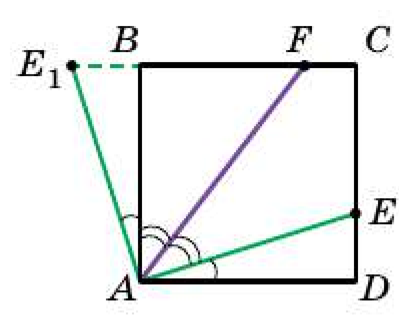


Рисунок к задаче 22.28

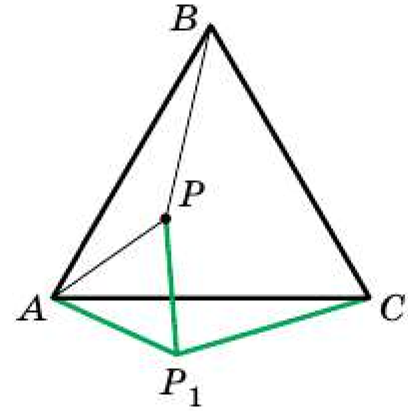


Рисунок к задаче 22.29

22.31. $\sqrt{3}$. *Указание*. Рассмотрите поворот $R_A^{60^{\circlearrowleft}}$ (см. рисунок). **22.32.** 3. **22.33.** 135°. *Указание*. Пусть $AP = x$, $BP = 2x$, $CP = 3x$. Рассмотрите поворот $R_B^{90^{\circlearrowleft}}$. **22.34.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. *Указание*. Имеем: $R_A^{60^\circ}(C) = C_1$ (см. рисунок). Докажите, что точки C, B и C_1 лежат на одной прямой. Воспользуйтесь тем, что треугольник ACC_1 и четырёхугольник $ABCD$ равновелики. **22.35.** *Указание*. Пусть O_1 и O_2 — центры квадратов $ABDE$ и $CBLK$ соответственно (см. рисунок). Четырёхугольник $O_1M_1O_2M_2$ — параллелограмм. Покажите, что отрезок AL является образом отрезка DC при повороте $R_B^{90^{\circlearrowleft}}$. **23.20.** 1) 1,5; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $\frac{2}{3}$. **23.24.** $\frac{1}{3}$. **23.25.** 12 см. **23.26.** 28,8 см^2. **23.28.** $\frac{S}{16}$. **23.29.** 1) $k = 2$, точка B или $k = -2$, точка пересечения диагоналей трапеции $AMNC$. **23.34.** *Указание*. Пусть данная окружность касается прямой a в точке M. Точка M_1 — образ точки M при гомотетии с центром A. Поскольку образом прямой a является эта же прямая, то точка M_1 принадлежит прямой a. Покажите, что образ данной окружности и прямая a имеют только одну общую точку M_1. **23.36.** $-\frac{1}{2}$. *Указание*. По определению гомотетии $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{MB}$. **23.37.** $(-3; 2)$. **23.38.** 1) $x = -3$, $y = 8$; 2) $x = 12$, $y = -2$. **23.39.** $x = 0$, $y = 8$. **23.40.** 20 см^2. **23.41.** 112 см^2. **23.42.** 1 : 2. *Указание*. $\frac{S_{\triangle AMK}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2}AK \cdot AM \sin A}{\frac{1}{2}AC \cdot AB \sin A} = \cos^2 A$. **23.43.** 1) $y =$

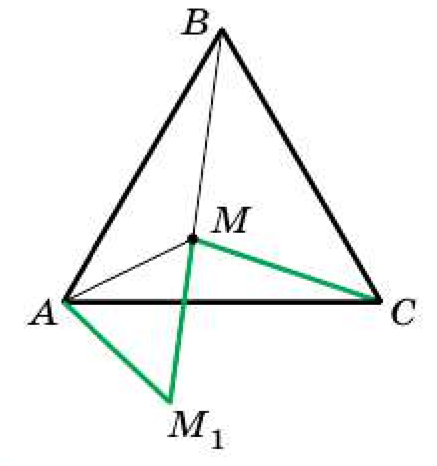


Рисунок к задаче 22.31

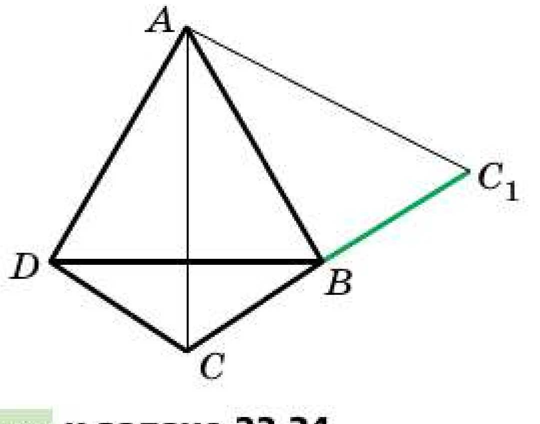


Рисунок к задаче 22.34

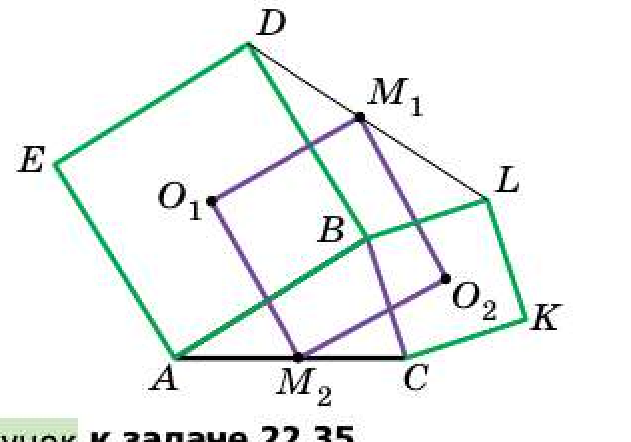


Рисунок к задаче 22.35

$= 2x + 2$; 2) $y = 2x - \frac{1}{2}$. *Указание*. Выберите произвольную точку M, принадлежащую данной прямой. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OM_1} = 2\overrightarrow{OM}$. Точка M_1 — образ точки M при данной гомотетии. Воспользуйтесь тем, что угловой коэффициент искомой прямой равен 2. **23.44.** 1) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$; 2) $(x - 4)^2 + (y + 8)^2 = 16$. **23.45.** *Указание*. Докажите, что если общая точка двух окружностей является центром гомотетии, при которой образом одной окружности является другая, то эти окружности касаются. **23.47.** *Указание*. Прямая A_2B_2 является образом прямой A_1B_1 при гомотетии с центром в точке касания и коэффициентом, равным отношению большего радиуса к меньшему. **23.49.** Окружность, за исключением точки A, которая является образом данной окружности при гомотетии с центром A и коэффициентом, равным $\frac{1}{2}$. **23.51.** *Указание*. Треугольник с вершинами в полученных точках является образом треугольника с вершинами в серединах сторон данного треугольника при гомотетии с центром M и коэффициентом, равным 2. **23.52.** $\frac{25}{16}$. **23.55.** *Указание*. Пусть A_1 и B_1 — точки пересечения соответственно прямых OA и OB с меньшей окружностью. Из задачи 23.47 следует, что $A_1B_1 \parallel AB$. Имеем $\angle B_1MB = \angle A_1B_1M = \angle MOB = \angle MA_1B_1 = \angle A_1MA = \angle AOM$. **23.56.** *Указание*. Постройте произвольный треугольник, два угла которого равны двум данным углам. Опишите около него окружность. Искомый треугольник является образом построенного треугольника при гомотетии с центром в произвольной точке и коэффициентом, равным отношению данного радиуса к радиусу построенной окружности. **23.58.** *Указание*. Постройте треугольник $A_1B_1C_1$, подобный данному, и примените гомотетию с центром в любой из вершин и коэффициентом $\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}}$. **23.59.** *Указание*. См. решение задачи 2 § 23. **23.60.** *Указание*. Постройте треугольник так, чтобы его стороны были параллельны данным прямым, а две вершины принадлежали сторонам данного треугольника. Потом примените гомотетию с центром в вершине данного треугольника. **23.61.** $\frac{2}{9}S$. **23.62.** *Указание*. Рассмотрите гомотетию с центром в середине отрезка AB и коэффициентом, равным $\frac{1}{3}$. **23.63.** Прямая, являющаяся образом прямой l при гомотетии с центром в середине отрезка AB и коэффициентом, равным $\frac{1}{3}$, за исключением точки пересечения

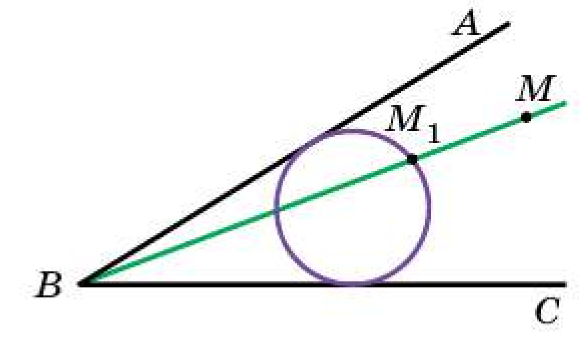


Рисунок к задаче 23.64

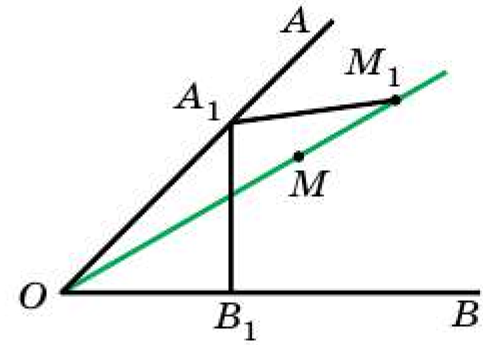


Рисунок к задаче 23.65

прямых AB и l (если такая точка существует). **23.64.** *Указание*. Постройте любую окружность, которая касается сторон угла (см. рисунок). Пусть M_1 — одна из точек пересечения прямой BM с построенной окружностью. Рассмотрите гомотетию с центром в точке B и коэффициентом, равным $\frac{BM}{BM_1}$. Задача имеет два решения. **23.65.** *Указание*. На луче OA выберем произвольную точку A_1. Проведём $A_1B_1 \perp OB$ и $A_1M_1 = A_1B_1$ так, чтобы M_1 принадлежала лучу OM (см. рисунок). Примените гомотетию с центром в точке O и коэффициентом $\frac{OM}{OM_1}$.
23.66. Основание высоты треугольника, проведённой из вершины B. *Указание*. Пусть точки M_1 и M_2 — середины отрезков AM и MC соответственно. Имеем: $H_M^2(M_1) = A$, $H_M^2(M_2) = C$. Тогда при указанной гомотетии образами проведённых перпендикуляров являются высоты треугольников, проведённые из вершин A и C. **23.67.** *Указание*. Пусть точки C_1 и B_1 — середины отрезков AB и AC соответственно. Тогда при гомотетии с центром A и коэффициентом $k = \frac{B_1C_1}{KL}$ образами проведённых прямых будут серединные перпендикуляры сторон AB и AC. **23.68.** *Указание*. Постройте образ данной окружности при гомотетии с центром M и коэффициентом -2. **23.69.** *Указание*. На гипотенузе AB во внешнюю сторону постройте равносторонний треугольник. Он является образом треугольника MNK при гомотетии с центром в точке C. **23.70.** *Указание*. Покажите, что $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $B_1C_1 \parallel B_2C_2$ и $C_1A_1 \parallel C_2A_2$. Далее воспользуйтесь результатом ключевой задачи 23.46. **23.72.** *Указание*. Докажите, что $AB \parallel A_2B_2$, $BC \parallel B_2C_2$, $AC \parallel A_2C_2$. **23.73.** *Указание*. Рассмотрим треугольник ABC, принадлежащий рассматриваемому множеству треугольников. Искомой окружностью будет образ вписанной окружности треугольника ABC при гомотетии с центром C и коэффициентом 2.

Глава 6. 24.16. $48\sqrt{2}$ см^2. **24.17.** 36 см^2. **25.10.** $\approx 1{,}24$ мм. **25.11.** $\approx 60\,000$ Н. **25.12.** 200π см^2; 320π см^3. **25.13.** 320π см^2, 1024π см^3. **25.14.** ≈ 3770 кг. **25.15.** 4,5 см. **25.16.** ≈ 550 кг. **25.19.** ≈ 3 кг. **26.1.** 1. **26.2.** 1 : 2. **26.4.** 7 см или 9 см. **26.5.** В $\frac{4}{3}$ раза. **26.6.** *Указание*. Пусть D — точка пересечения прямых BH и AC (см. рисунок). Тогда в треугольнике ABD отрезок AH — биссектриса и высота, а значит, и медиана. Следовательно, отрезок MH — средняя линия треугольника BCD. **26.7.** 10 см. **26.8.** 40°, 80°, 40°. **26.9.** 36°. **26.10.** 72°, 72° и 36°. **26.12.** *Указание*. Докажите, что $\triangle ABG = \triangle DBC$. **26.19.** 3 : 5. **26.26.** *Указание*. Пусть A_1 и B_1 — основания перпендикуляров, опущенных из вершин A и B треугольника ABC на биссектрису угла C. Имеем: $(BC + AC)\sin\frac{C}{2} = BC\sin\frac{C}{2} + AC\sin\frac{C}{2} = BB_1 + AA_1 \leqslant AB$, что и требовалось доказать. **26.27.** $\frac{ah}{a+h}$. **26.28.** 12 см. **26.29.** $\frac{5}{6}\sqrt{m^2+n^2}$, $\frac{5}{4}\sqrt{m^2+n^2}$. *Указание*. Пусть вершины M, K и N ромба $AMKN$ находятся соответственно на сторонах AB, BC и AC треугольника ABC (см. рисунок). Сторона ромба равна $\frac{1}{2}\sqrt{m^2+n^2}$. Из подобия треугольников CKN и CBA находим, что $NK : AB = CK : CB = 3 : 5$. Следовательно, $AB = \frac{5}{3}NK$. Аналогично находим сторону AC. **26.30.** $\frac{2ah}{(a+h)^2}$. **26.31.** *Указание*. Если ABC — произвольный треугольник с периметром P и площадью S, то треугольник, подобный ему с коэффициентом подобия k, имеет периметр kP и площадь k^2S. Равенство $kP = k^2S$ выполняется при $k = \frac{P}{S}$. Таким образом, среди треугольников, подобных данному, всегда найдётся треугольник, удовлетворяющий условию задачи. **26.32.** 3 : 1, считая от вершины A. *Указание*. Пусть медиана CE и биссектриса AD пересекаются в точке M. Через вершину A проведём прямую, параллельную BC, и продолжим медиа-

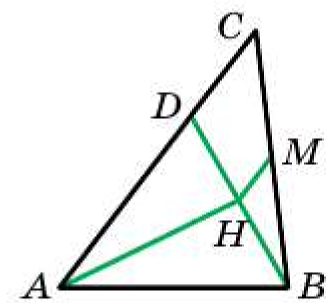


Рисунок к задаче 26.6

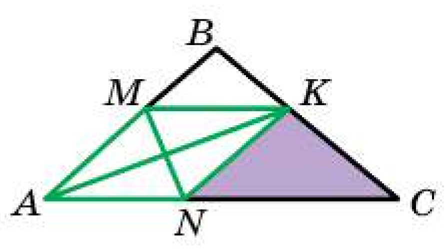


Рисунок к задаче 26.29

ну CE до пересечения с этой прямой в точке T. Пусть $CD = a$, $BD = 2a$. Из равенства треугольников AET и BEC следует, что $AT = BC = 3a$, а из подобия треугольников AMT и DMC — $\frac{AM}{MD} = \frac{AT}{CD} = \frac{3a}{a} = 3$.
26.33. $60°$ или $120°$. **26.34.** $\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}^2\alpha$ см^2. *Указание*. Треугольник C_1BA_1 подобен треугольнику CBA с коэффициентом $\cos\angle B = \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$, поэтому $A_1C_1 = AC\sin\alpha = \sin\alpha$. Пусть R — радиус описанной окружности треугольника C_1BA_1. Тогда $R = \frac{A_1C_1}{2\sin B} = \frac{\sin\alpha}{2\cos\alpha} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$.
26.35. $18\sqrt{2}$. *Указание*. Указанная прямая отсекает от данного треугольника подобный ему треугольник, площадь которого относится к площади данного как $1 : 2$. Поэтому коэффициент подобия равен $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Следовательно, длина искомого отрезка равна $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 36 = 18\sqrt{2}$.
26.36. *Указание*. Постройте параллелограммы $ACBD$ и $BAKC$.
26.38. 7 см, 25 см, 24 см. *Указание*. Данный треугольник — прямоугольный. **26.39.** 5 см. *Указание*. Пусть r — искомый радиус, r_1 и r_2 — радиусы данных окружностей. Из подобия треугольников ACD, CBD и ABC следует, что $r_1 : r_2 : r = AC : BC : AB$. Значит, $r^2 = r_1^2 + r_2^2 = 25$.
26.40. 9 см, 12 см, 15 см. *Указание*. Пусть M, N и K — точки касания окружности соответственно с гипотенузой AB и катетами BC и AC треугольника ABC, O — центр вписанной окружности, r — её радиус. Пусть $BM = 2x$. Тогда $BN = BM = 2x$, $AK = AM = 3x$. Поскольку $CKON$ — квадрат, то $CN = CK = r$. Поэтому $BC = 2x + r$, $AC = 3x + r$. По теореме Пифагора $AB^2 = BC^2 + AC^2$, или $(2r + x)^2 + (3x + r)^2 = 25x^2$. Из этого уравнения находим, что $r = x$. **26.41.** *Указание*. Пусть O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, r — радиус этой окружности, прямая пересекает стороны AB и BC в точках K и L соответственно. Тогда $\frac{S_{KACL}}{S_{KBL}} = \frac{S_{AKO} + S_{AOC} + S_{OLC}}{S_{KOB} + S_{BOL}} = \frac{\frac{1}{2}AK \cdot r + \frac{1}{2}AC \cdot r + \frac{1}{2}CL \cdot r}{\frac{1}{2}KB \cdot r + \frac{1}{2}BL \cdot r} = \frac{AK + AC + CL}{KB + BL}$. Также следует рассмотреть случай, когда данная прямая проходит через одну из вершин треугольника. **26.42.** *Указание*. Пусть точка O — центр описанной окружности треугольника BJC. Докажите, что четырёхугольник $ABOC$ вписанный.
26.44. *Указание*. Докажите, что четырёхугольник $MBNK$ вписанный, а затем вос-

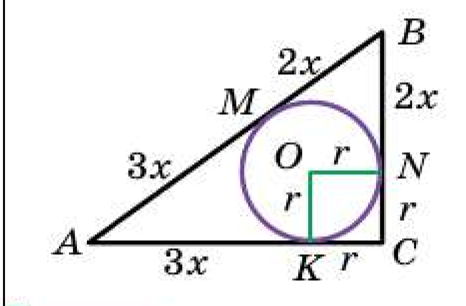


Рисунок к задаче 26.40

пользуйтесь свойством, обратным свойству угла между касательной и хордой. **26.45.** *Указание*. Из подобия треугольников ABD и ACB следует, что $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$, откуда с учётом $AB = DC$ можно записать $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{AC}$. **26.46.** *Указание*. Докажите, что $EF \parallel AC$. **26.47.** $3\sqrt{5}$ см. *Указание*. Воспользуйтесь тем, что CL — биссектриса угла HCM. **26.48.** *Указание*. $AC > AB - BC = 5$ см. Пусть $AD = 3x$ см, тогда $CD = 2x$ см, где $x > 1$. Можно записать $BD^2 = 150 - 6x^2 < 144$. **26.49.** *Указание*. Пусть $BD = 2m$, $CD = 2n$. По свойству биссектрисы треугольника и теореме синусов $m : n = \sin C : \sin B$. Точки O и O_1 лежат на серединном перпендикуляре стороны AB, а их проекции на прямую BC — середины отрезков BC и BD соответственно. Поэтому $OO_1 = \frac{n}{\sin B}$. Аналогично, $OO_2 = \frac{m}{\sin C} = \frac{n}{\sin B} = OO_1$. **26.50.** $\frac{7 + 4\sqrt{7}}{9}$ см. **26.51.** $\frac{128(3 + 2\sqrt{2})}{49}$. **26.52.** $\frac{1}{2}(p - a)^2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **26.55.** 9 см. **26.65.** 126 см. **26.67.** 60°. **26.68.** 45°. **26.69.** 60° и 120°. **26.70.** $2a$. **26.73.** a, $a + b$ или b, $a + b$. **26.74.** *Указание*. Докажите, что $\angle B = \angle D = 90^\circ$. **26.75.** *Указание*. Воспользуйтесь тем, что четырёхугольник $ACDE$ вписанный. **26.80.** 4 см. *Указание*. Докажите, что $BC \parallel AD$. **26.82.** 84 см². *Указание*. На продолжении стороны AD за точку D отметьте точку M так, чтобы $DM = BC$. Площадь треугольника ACM равна площади трапеции. **26.83.** $\frac{1}{2}(a + b)$. **26.85.** *Указание*. Воспользуйтесь тем, что середины диагоналей и середины двух противолежащих сторон четырёхугольника являются вершинами параллелограмма, стороны которого равны половинам двух других сторон четырёхугольника. **26.87.** *Указание*. Четырёхугольники $AKLD$ и $KBCL$ — вписанные. Пусть F — точка пересечения CK и AD. Тогда $\angle CKD = \angle KFD + \angle KDF$. **26.88.** *Указание*. Воспользовавшись тем, что четырёхугольник $AKHL$ вписанный, докажите, что $\angle BKL + \angle BCL = 180°$. **26.89.** *Указание*. $\triangle CBO \backsim \triangle CAB$, отсюда $CO \cdot CA = CB^2$. Кроме того, $\triangle CBO \backsim \triangle DBC$, и можно записать $BO \cdot BD = CB^2$. **26.90.** *Указание*. I способ. Пусть E — точка пересечения прямых DA и CB (см. рисунок). Тогда $\frac{EA}{ED} = \frac{EB}{EC}$, кроме того, $EB^2 = EA \cdot ED$. Из двух полученных равенств следует, что $ED^2 = EB \cdot EC$. II способ.

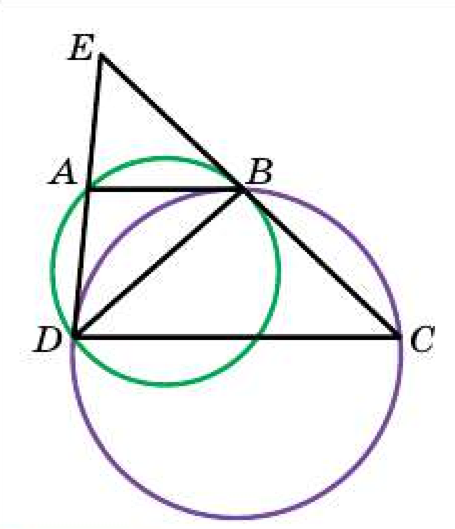


Рисунок к задаче 26.90

Рассмотрим треугольники ABD и CDB. Имеем: $\angle ABD = \angle CDB$, $\angle BAD = \angle CBD$. Отсюда $\angle BDA = \angle BCD$. **26.91.** Не могут. *Указание*. Предположим, что такое расположение возможно. Тогда найдутся две стороны пятиугольника, каждой из которых принадлежат две вершины семиугольника. Далее воспользуйтесь тем, что угол между прямыми, содержащими эти стороны, равен $36°$ или $72°$. **26.92.** $2R\ (\sqrt{5}\ - 2)$. *Указание*. Воспользуйтесь теоремой Птолемея. **26.93.** *Указание*. Пусть F — точка пересечения прямой BE с основанием AD. Тогда площадь каждого из указанных треугольников равна половине площади параллелограмма $BCDF$. **26.94.** *Указание*. Воспользуйтесь следующим известным фактом: сумма диагоналей четырёхугольника меньше его периметра. Тогда для диагоналей и сторон трапеции $ABCD$ выполняется неравенство $AB + BC + CD + DA > AC + BD$ (см. рисунок). Поскольку $AB + CD = BC + AD$ и $AC = BD$, то получаем $2\ (BC + AD) > 2AC$; $BC + AD > AC$. На луче AD отметьте точку M так, что $CM \parallel BD$ (см. рисунок). Тогда $\angle ACM = \angle BOC$, $CM = BD = AC$, $AM = AD + DM = AD + BC$. Поскольку $AM > AC = CM$, то AM — наибольшая сторона треугольника ACM. Отсюда следует, что $\angle ACM > 60°$. **26.95.** *Указание*. Из условия следует, что $ABCD$ — трапеция или ромб (в частности, квадрат). В обоих случаях $S = \dfrac{AD + BC}{2}h$, где h — высота (см. рисунок). Очевидно, что $h \leqslant \dfrac{AB + CD}{2} = \dfrac{AD + BC}{2}$. Имеем: $\dfrac{(AD + BC)^2}{4} \geqslant S$. Отсюда $AD + BC \geqslant 2\sqrt{S}$. **26.96.** *Указание*. Воспользуйтесь теоремой Птолемея. **26.97.** $67°30'$. **26.98.** $\dfrac{\pi - 2}{3\pi + 2}$. **26.99.** 1 см. **26.100.** $45°$. **26.101.** $90°$. **26.102.** $60°$. **26.103.** $15°$ или $165°$. *Указание*. По прошествии часа минутная стрелка вернётся в исходное положение, а часовая пройдёт $\dfrac{1}{12}$ часть окружности, т. е. повернётся на угол, равный $30°$. Равенство углов, указанное в условии, означает, что минутная стрелка является либо биссектрисой угла между двумя положениями часовой стрелки, либо

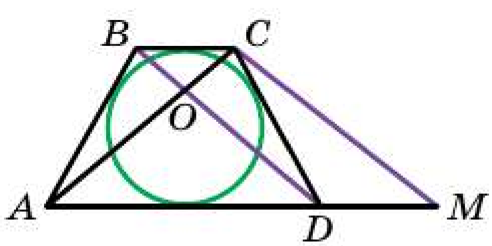


Рисунок к задаче 26.94

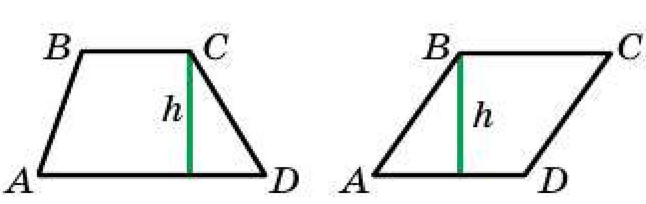


Рисунок к задаче 26.95

лучом, дополнительным к этой биссектрисе. **26.105.** $R \sin 2\alpha$. **26.106.** 120°. **26.107.** *Указание.* Соедините точку B с центром окружности. **26.108.** *Указание.* Пусть O — центр окружности. Так как $\angle MAC = \angle ACO = \angle CAO$, то $\triangle AMC = \triangle ADC$. Аналогично $\triangle CDB = \triangle CNB$. Так как $\triangle ACD \sim \triangle CDB$, то $CD^2 = AD \cdot DB = AM \cdot NB$. **26.109.** *Указание.* Докажите равенство треугольников AOB и AOD. **26.110.** *Указание.* Угол между радиусами, проведёнными в точки касания, дополняет угол между касательными в этих точках до 180°. **26.111.** $2\sqrt{Rr}$. **26.112.** 9 см. **26.113.** 8 см или 2 см. *Указание.* Пусть O_1 — центр окружности с диаметром AC, O_2 — центр окружности с диаметром AD. Точка B лежит на окружности с диаметром AC, поэтому $\angle ABC = 90°$. Аналогично $\angle ABD = 90°$. Далее рассмотрите два случая: точки O_1 и O_2 лежат по разные стороны от прямой AB и точки C и D лежат по одну сторону от прямой AB. **26.114.** *Указание.* Точки M, B и C лежат на окружности с диаметром AO. Кроме того, хорды OB и OC этой окружности равны. **26.115.** 25 см². *Указание.* Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия. **26.116.** *Указание.* Угол между пересекающимися хордами окружности равен полусумме противоположных дуг, высекаемых этими хордами. **26.117.** *Указание.* Докажите, что $\angle D = 180° - \angle O_1AO_2$. **26.118.** *Указание.* 1) Так как $\angle MAB = \angle BNA$, то сумма углов ABN и MAN равна сумме углов треугольника ABN; 2) Так как $\angle BAM = \angle BNA$ и $\angle BAN = \angle BMA$, то $\triangle AMB \sim \triangle NAB$, а значит, $AM : NA = MB : AB$ и $AM : NA = AB : NB$. Перемножая почленно левые и правые части этих равенств, получаем требуемое. **26.119.** *Указание.* Пусть D_1 — точка пересечения прямой BD с окружностью, отличная от точки B. Тогда $\cup AB = \cup AD_1$, поэтому $\angle ACB = \angle AD_1B = \angle ABD_1$. Треугольники ACB и ABD имеют общий угол A и, кроме того, $\angle ACB = \angle ABD$, поэтому $\triangle ACB \sim \triangle ABD$. Следовательно, $AB : AC = AD : AB$. **26.121.** (–9; 0). **26.122.** (0; –2,5). **26.126.** $(x - 7)^2 + (y + 0{,}5)^2 = 6{,}25$. **26.127.** Да. **26.128.** (–1; 0), (–9; 0). **26.129.** $y = 6x + 23$. **26.130.** $y = -x + 3$. **26.131.** $y = -\frac{5}{3}x - 4$. **26.137.** $-\frac{4}{5}$. **26.138.** $\frac{\sqrt{2}}{10}$. **26.140.** $5x + y = 22$. **26.141.** *Указание.* Пусть точка M_1 — середина отрезка A_1A_2, точка M_2 — середина отрезка A_2A_3 и т. д. Тогда $\overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_3M_4} + \overrightarrow{M_5M_6} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A_1A_3} + \overrightarrow{A_3A_5} + \overrightarrow{A_5A_1}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_1A_1} = \vec{0}$. **26.142.** *Указание.* Пусть точки P и Q — середины хорд AB и CD соответственно. Тогда четырёхугольник $OPMQ$ — прямоугольник. Следовательно, $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$.

26.143. *Указание.* Пусть точки M и N таковы, что $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Поскольку $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$, то $\overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{ON}$, т. е. $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$ — противоположные векторы. Поэтому точки M, O и N лежат на одной прямой. Поскольку четырёхугольники $OAMD$ и $OBNC$ — ромбы, то $AD \perp MN$ и $BC \perp MN$. Поэтому $AD \parallel BC$. Аналогично можно доказать, что $AB \parallel CD$. Значит, четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм, вписанный в окружность, т. е. прямоугольник. **26.144.** *Указание.* Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — медианы треугольника ABC, а KK_1, MM_1, NN_1 — медианы треугольника MNK, причём $\overrightarrow{NK} = \overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{BB_1}$. Если PQR — такой треугольник, что $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{KK_1}$, $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{NN_1}$, $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{MM_1}$, то $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{KK_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{KN} + \overrightarrow{KM}) =$
$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BB_1} - \overrightarrow{AA_1}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})\right) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA}) =$
$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA}) = \frac{1}{4}(3\overrightarrow{BA}) = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$. **26.145.** *Указание.* Выберем систему координат так, чтобы начало координат совпало с точкой A_1, а ось ординат — с прямой l (см. рисунок). Тогда абсцисса x_i центра i-го квадрата равна $\frac{i}{2}$, а его ордината y равна $1 + 2 + \ldots + \frac{i}{2} = \frac{i^2}{2}$. Поскольку $y_i = 2x_i^2$, то центры всех квадратов принадлежат параболе $y = 2x^2$. **26.152.** 3 см^2. **26.153.** 27,5 см^2. **26.154.** $\frac{320}{27}$ см^2. **26.155.** $\frac{25}{16}$. *Указание.* Треугольник $A_2B_2C_2$ является образом треугольника ABC при гомотетии с коэффициентом, равным $-\frac{5}{4}$, и центром в точке пересечения медиан треугольника ABC. **26.156.** *Указание.* Воспользуйтесь тем, что прямая DK является образом прямой CM при параллельном переносе

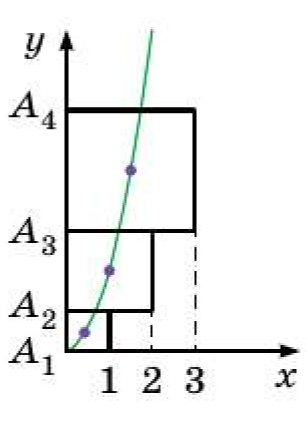


Рисунок к задаче 26.145

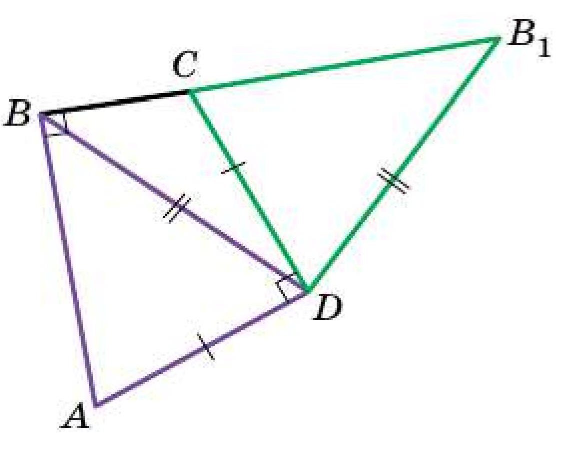


Рисунок к задаче 26.159

на вектор $\overrightarrow{AB}$. **26.157.** 1 см. *Указание*. Рассмотрите параллельный перенос треугольника AKB на вектор $\overrightarrow{BC}$. Пусть точка O — образ точки K. Докажите, что точка O — центр описанной окружности треугольника CKD. **26.158.** *Указание*. Пусть образом точки A, при симметрии относительно прямой BK является точка M. Тогда точка M принадлежит прямой BC и $AK = MK$. Точка B принадлежит серединному перпендикуляру отрезка AM. **26.159.** $\frac{1}{2}$. *Указание*. Рассмотрим поворот с центром в точке D на угол $90°$ по часовой стрелке. При таком повороте образом треугольника ABD является треугольник DCB_1 (см. рисунок). Поскольку $\angle DAB + \angle DCB = 180°$, то точки B, C и B_1 лежат на одной прямой. Площадь четырёхугольника $ABCD$ равна площади треугольника BDB_1. В треугольнике BDB_1 $BD = DB_1 = 1$ и $\angle BDB_1 = 90°$. Искомая площадь равна $\frac{BD^2}{2} = \frac{1}{2}$. **26.160.** Нужное разрезание изображено на рисунке. Линия разреза — ломаная CMK получается из ломаной CBA поворотом вокруг точки C на угол $45°$. **26.161.** *Указание*. Пусть O — центр данной окружности, R — радиус окружности, k — данное отношение. Построим окружность, гомотетичную данной с центром гомотетии в точке A и коэффициентом $(-k)$. Для этого надо сначала построить точку O_1 так, чтобы точка A лежала на отрезке OO_1 и $O_1A = kOA$ (см. рисунок). Точка O_1 будет центром новой окружности с радиусом $R_1 = kR$. Искомая хорда проходит через точку пересечения окружностей и точку A. Задача имеет 2, 1 или 0 решений в зависимости от того, пересекаются окружности, касаются или же одна из них целиком расположена внутри другой.

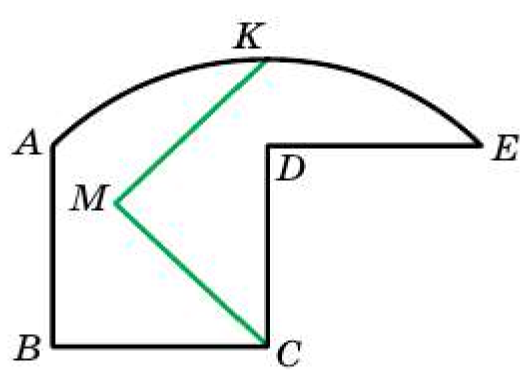


Рисунок к задаче 26.160

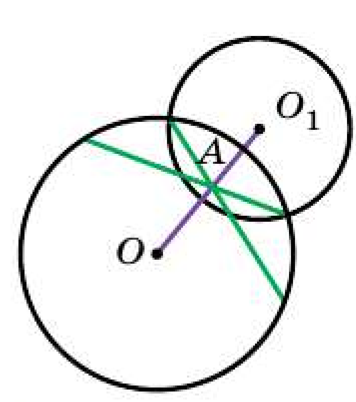


Рисунок к задаче 26.161

Алфавитно-предметный указатель

Асимптота гиперболы 84

Базис 140
Боковая грань пирамиды 236
— — призмы 234
— поверхность конуса 242
— — цилиндра 241
Боковое ребро пирамиды 236
— призмы 234
Большая полуось эллипса 83

Вектор 116
—, отложенный от точки 118
Векторная величина 116
Векторы коллинеарные 117
— перпендикулярные 151
— противоположно направленные 117
— противоположные 130
— равные 118
— сонаправленные 117
Вершина конуса 242
— многогранника 233
— пирамиды 236
Ветвь гиперболы 84
Высота конуса 242
— пирамиды 237

Геометрические тела 233
Гипербола 83
Гомотетия 207
Грань многогранника 233

Движение 171
Декартовы координаты 74
Длина дуги окружности 62
— окружности 62

Единичная полуокружность 5

Задача о квадратуре круга 65

Инверсия 224

Композиция преобразований 166
Конец вектора 116
Конус 242
Координата вектора вторая 123
— — первая 123
Координаты вектора 122
— — в базисе 140
— середины отрезка 76
Косинус 6
Котангенс 8
Коэффициент гомотетии 207
— подобия 210
Круговой сегмент 64
— сектор 64
Куб 234
— единичный 235

Ломаная, вписанная в линию 60
Луночки Гиппократа 65

Малая полуось эллипса 83
Многогранник 233
Модуль вектора 117

Направленный отрезок 116
Начало вектора 116
Неподвижные точки инверсии 224
Нуль-вектор 117

Образ фигуры 164
Образующая конуса 242
— цилиндра 241
Объём конуса 243

— пирамиды 237
— прямой призмы 235
— цилиндра 242
— шара 244
Окружность инверсии 224
Осевая симметрия 180
Основание конуса 242
— пирамиды 236
— призмы 234
— сегмента 64
— цилиндра 241
Ось конуса 242
— симметрии 182
— цилиндра 240
Отображение фигуры 164

Параллелепипед прямоугольный 235
Параллельный перенос 174
Пирамида 236
Плоскость *xy* 74
Площади подобных многоугольников 211
Площадь боковой поверхности конуса 242
— — — призмы 235
— — — цилиндра 242
— круга 64
— кругового сегмента 64
— — сектора 64
— поверхности пирамиды 236
— — призмы 235
— — шара 244
— сферы 244
Поверхность шара 243
Поворот 199
Полукруг 65
Правило параллелограмма для сложения векторов 128
— треугольника для сложения векторов 126
Правильный многоугольник 49
Преобразование обратимое 165
— обратное 166
— подобия 209
— тождественное ???
— фигуры 165
— — на себя 166
Преобразования взаимно обратные 175
Призма 234
— прямая 234
Произведение вектора и числа 137
Прообраз фигуры 164
Прямая Эйлера 144

Равные фигуры 173
Радикальная ось окружностей 110
Радикальный центр трёх окружностей 113
Радиус инверсии 224
— сферы 243
— шара 243
Развёртка боковой поверхности конуса 243
— — — цилиндра 241
Разложение вектора по базису 140
— — по векторам 140
Разность векторов 129
Ребро многогранника 233
— основания пирамиды 236
— основания призмы 234
Решение треугольников 32

Свойства гомотетии 209
— инверсии 224
— осевой симметрии 181
— параллельного переноса 174
— поворота 200

— преобразования подобия 210
— центральной симметрии 191
Сегмент 64
Сектор 64
Синус 6
Скаляр 116
Скалярная величина 116
Скалярное произведение векторов 151
Скалярный квадрат вектора 152
Степень точки относительно окружности 109
Стереометрия 233
Сумма векторов 126
Сфера 243

Тангенс 8
Теорема косинусов 12
— Птолемея 228
— синусов 22
— Чевы 29
Точки, симметричные относительно прямой 180
—, — — точки 191
Треугольник ортоцентрический 186
Тригонометрические функции 8
Тригонометрия 36

Угловой коэффициент 95
Угол между векторами 150
— — прямой и положительным направлением оси абсцисс 94
— поворота 199
Умножение вектора на число 137
Уравнение окружности 82
— прямой 90
— —, проходящей через две данные точки 96
— —, — — данную точку, с данным угловым коэффициентом 96
— — с угловым коэффициентом 95
— фигуры 81
Условие перпендикулярности векторов 152

Фигуры гомотетичные 207
— подобные 210
— симметричные относительно прямой 181
—, — — точки 191
Фокус гиперболы 83
— эллипса 83
Формула Герона 39
— для нахождения площади выпуклого четырёхугольника 41
— — — — параллелограмма 40
— — — — треугольника 38, 40
— Карно 46
— Лейбница 105
— Эйлера 31

Центр гомотетии 207
— инверсии 224
— поворота 199
— правильного многоугольника 51
— симметрии 192
— сферы 243
— шара 243
Центральная симметрия 191
Центральный угол правильного многоугольника 51
Цилиндр 240

Чевиана 29
Число π 62

Шар 243

Эллипс 83

Оглавление

Глава 1. Решение треугольников

§ **1.** Синус, косинус, тангенс и котангенс угла от 0° до 180° . . . **5**
§ **2.** Теорема косинусов . . . **12**
§ **3.** Теорема синусов . . . **22**
• Тригонометрическая форма теоремы Чевы . . . **29**
• Формула Эйлера для нахождения расстояния между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника . . . **31**
§ **4.** Решение треугольников . . . **32**
• Тригонометрия — наука об измерении треугольников . . . **36**
§ **5.** Формулы для нахождения площади треугольника . . . **38**
Итоги главы 1 . . . **47**

Глава 2. Правильные многоугольники

§ **6.** Правильные многоугольники и их свойства . . . **49**
§ **7.** Длина окружности. Площадь круга . . . **60**
Итоги главы 2 . . . **72**

Глава 3. Декартовы координаты на плоскости

§ **8.** Расстояние между двумя точками с данными координатами. Деление отрезка в данном отношении . . . **74**
§ **9.** Уравнение фигуры . . . **81**
§ **10.** Общее уравнение прямой . . . **89**
§ **11.** Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки . . . **94**
§ **12.** Метод координат . . . **103**
• Как строили мост между геометрией и алгеброй . . . **108**
• Радикальная ось двух окружностей . . . **109**
Итоги главы 3 . . . **114**

Глава 4. Векторы

§ **13.** Понятие вектора . . . **116**
§ **14.** Координаты вектора . . . **122**
§ **15.** Сложение и вычитание векторов . . . **126**
§ **16.** Умножение вектора на число. Применение векторов к решению задач . . . **137**
§ **17.** Скалярное произведение векторов . . . **150**
Итоги главы 4 . . . **161**

Глава 5. Преобразования фигур

§ **18.** Преобразование (отображение) фигур . . . **164**
§ **19.** Движение. Параллельный перенос . . . **171**

§ **20.** Осевая симметрия **180**
§ **21.** Центральная симметрия **191**
§ **22.** Поворот **199**
§ **23.** Гомотетия. Подобие фигур **207**
• Инверсия **224**
Итоги главы 5 .... **230**

Глава **6. Начальные сведения по стереометрии**
§ **24.** Прямая призма. Пирамида **233**
§ **25.** Цилиндр. Конус. Шар **240**
Итоги главы 6 .... **247**

§ **26.** Упражнения для повторения курса планиметрии **249**

Дружим с компьютером **264**
Проектная работа **269**
Ответы и указания к упражнениям **274**
Алфавитно-предметный указатель **300**

Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса некоторых углов

	$\alpha = 0^\circ$	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 60^\circ$	$\alpha = 90^\circ$	$\alpha = 180^\circ$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–

Свойства синуса, косинуса, тангенса и котангенса

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$

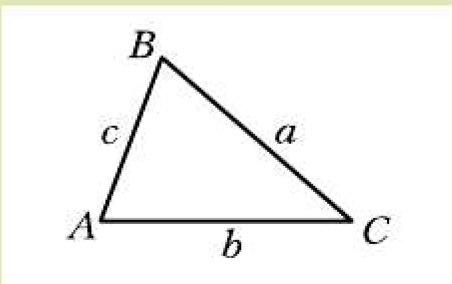
$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

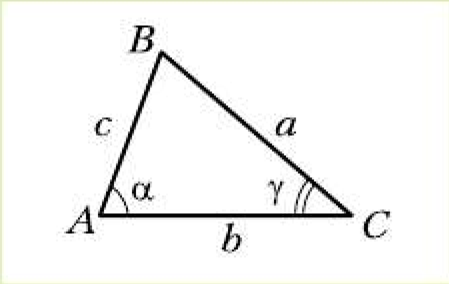
$$\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$$

Соотношения между сторонами и углами треугольника



Теорема синусов	Теорема косинусов
$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

Формулы для нахождения площади треугольника



$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

Формула Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

$$S = \frac{abc}{4R}$$

$$S = pr$$

Формулы для нахождения радиусов вписанной и описанной окружностей треугольника

$$r = \frac{S}{p} \qquad R = \frac{a}{2\sin\alpha} \qquad R = \frac{abc}{4S}$$

Декартовы координаты на плоскости

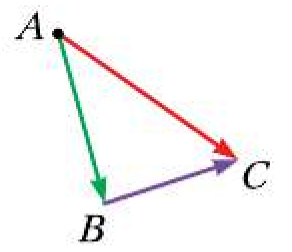
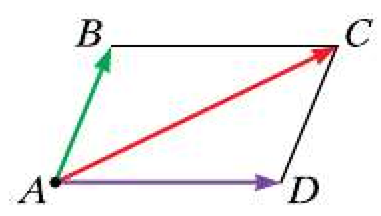
Расстояние между двумя точками	Если $A\ (x_1; y_1)$ и $B\ (x_2; y_2)$, то $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
Координаты середины отрезка	Если $C\ (x_0; y_0)$ – середина отрезка AB с концами $A\ (x_1; y_1)$ и $B\ (x_2; y_2)$, то $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$
Уравнение окружности	$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, где $A\ (a; b)$ – центр окружности, R – радиус окружности
Уравнение прямой	$ax + by = c$, где a, b и c – некоторые числа, причём a и b не равны нулю одновременно

Векторы

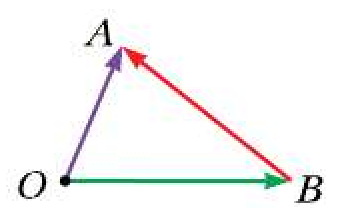
Модуль вектора

$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, где $(a_1; a_2)$ – координаты вектора $\vec{a}$

Сложение векторов

Правило треугольника	Правило параллелограмма
	
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

Вычитание векторов



$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$

Скалярное произведение векторов

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a}, \vec{b})$

Латинский алфавит

Печатные буквы		Названия букв
A	a	а
B	b	бэ
C	c	цэ
D	d	дэ
E	e	е
F	f	эф
G	g	жэ
H	h	аш
I	i	и
J	j	жи
K	k	ка
L	l	эль
M	m	эм
N	n	эн
O	o	о
P	p	пэ
Q	q	ку
R	r	эр
S	s	эс
T	t	тэ
U	u	у
V	v	вэ
W	w	дубль-вэ
X	x	икс
Y	y	игрек
Z	z	зед

Греческий алфавит

Печатные буквы		Названия букв
Α	α	альфа
Β	β	бета
Γ	γ	гамма
Δ	δ	дельта
Ε	ε	эпсилон
Ζ	ζ	дзета
Η	η	эта
Θ	θ, ϑ	тета
Ι	ι	йота
Κ	κ	каппа
Λ	λ	лямбда
Μ	μ	мю
Ν	ν	ню
Ξ	ξ	кси
Ο	ο	омикрон
Π	π	пи
Ρ	ρ	ро
Σ	σ, ς	сигма
Τ	τ	тау
Υ	υ	ипсилон
Φ	φ, ϕ	фи
Χ	χ	хи
Ψ	ψ	пси
Ω	ω	омега